УДК 519.2

Е.В. Капустин

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ В СЛУЧАЕ ВЫПЛАТ, ИМЕЮЩИХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СО СДВИГОМ

В работе вычисляется вероятность разорения страховой компании для одного из вариантов распределения величины страховой выплаты. Особенности распределения позволяют получить точное значение вероятности разорения компании в зависимости от величины капитала. Исследовано асимптотическое поведение вероятности разорения компании при больших значениях капитала.

Ключевые слова: *модель страховой компании, вероятность разорения, асимптотическое поведение.*

Исследованию математических моделей страховых компаний, в том числе вероятности разорения (выживания) компании, посвящено большое количество работ. В некоторых случаях удается получить вероятность разорения в виде точного выражения [1–7]. Как правило, такие результаты получены в случае экспоненциального распределения величины страховых выплат как наиболее простого и доступного для исследования. Недостатком этого распределения является то, что наибольшую вероятность имеют выплаты, близкие к нулю, что недостаточно хорошо соответствует реальной ситуации.

В представленной работе рассматривается модель страховой компании с распределением выплат, не имеющим этого недостатка.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую модель страховой компании: поступление капитала в компанию за счет страховых взносов детерминировано и имеет постоянную скорость c, страховые выплаты образуют пуассоновский поток постоянной интенсивности λ, размеры страховых выплат независимы и имеют одинаковое распределение с плотностью $\pi(x)$ и начальным моментом 1-го порядка m_1. В литературе такая модель называется классической моделью страховой компании [6–8].

Возьмем в качестве плотности распределения величины выплаты

$$\pi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-\frac{x-x_0}{\theta}}, & \text{если } x > x_0, \\ 0, & \text{если } x < x_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_0 > 0$. Распределение с этой плотностью будем называть экспоненциальным со сдвигом.

2. Вычисление вероятности разорения страховой компании

Обозначим $P(S)$ вероятность разорения компании при уровне капитала S. Известно [6, 7], что $P(S)$ удовлетворяет уравнению

$$cP'(S)-\lambda P(S)+\lambda\left[\int_0^S P(S-x)\pi(x)dx+\int_S^{+\infty}\pi(x)dx\right]=0 \tag{2}$$

и граничному условию

$$\lim_{S\to\infty}P(S)=0\,. \tag{3}$$

Применяя операционный метод [9], можно показать [6, 7], что если выполняется условие нормального функционирования компании

$$c>\lambda m_1\,, \tag{4}$$

то задача (2), (3) имеет единственное ограниченное решение, причем его изображение (преобразование Лапласа)

$$\tilde{P}(p)=\int_0^{\infty}P(S)e^{-pS}dS$$

имеет вид

$$\tilde{P}(p)=\frac{1}{p}-\frac{c-\lambda m_1}{cp-\lambda(1-\tilde{\pi}(p))}\,. \tag{5}$$

где $\tilde{\pi}(p)$ – изображение $\pi(x)$.

Чтобы найти вероятность разорения компании $P(S)$, нужно найти оригинал функции $\tilde{P}(p)$. Если страховые выплаты имеют экспоненциальное распределение со сдвигом (1), то

$$m_1=x_0+\theta\,,$$

$$\tilde{\pi}(p)=\frac{e^{-px_0}}{1+\theta p}\,,$$

(4) и (5) принимают вид

$$c>\lambda(x_0+\theta)\,, \tag{6}$$

$$\tilde{P}(p)=\frac{1}{p}-\left(1-\frac{\lambda(x_0+\theta)}{c}\right)\frac{1}{p-\frac{\lambda}{c}+\frac{\lambda}{c}\frac{e^{-px_0}}{1+\theta p}}\,. \tag{7}$$

Раскладывая дробь, стоящую в правой части (7), в ряд по степеням e^{-px_0}, имеем

$$\tilde{P}(p)=\frac{1}{p}-\left(1-\frac{\lambda(x_0+\theta)}{c}\right)\left\{\frac{1}{p-\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\lambda}{c\theta}\right)^n\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}\frac{1}{(p+\beta)^n}e^{-npx_0}\right\}, \tag{8}$$

где $$\alpha=\frac{\lambda}{c},\qquad \beta=\frac{1}{\theta}\,.$$

При достаточно большом x_0 ряд в (8) сходится в области $\operatorname{Re} p > x_0$ (точка $p = \alpha$ в эту область не входит), то есть правая часть (8) является изображением [9]. Вычисляя обратное преобразование Лапласа [9], получаем

$$P(S) = 1 - \left(1 - \frac{\lambda(x_0 + \theta)}{c}\right) \times$$

$$\times \left\{ e^{\alpha S} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\lambda}{c\theta}\right)^n \left[\int_0^{S-nx_0} \frac{x^n}{n!} e^{\alpha x} \frac{(S - nx_0 - x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\beta(S-nx_0-x)}\, dx \right] \mathbf{1}(S - nx_0) \right\}. \quad (9)$$

где $\mathbf{1}(x)$ – единичная функция [9],

$$\mathbf{1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Заметим, что при фиксированном S сумма в правой части (9) содержит лишь конечное число слагаемых.

3. Асимптотическое поведение вероятности разорения страховой компании при больших значениях капитала

Исследуем поведение функции (9) при больших значениях *S*. Известно [7, 9], что при $S \to \infty$

$$P(S) \sim \operatorname*{res}_{p=p_0} \tilde{P}(p) e^{pS}, \quad (10)$$

где p_0 – особая точка $\tilde{P}(p)$, имеющая наибольшую вещественную часть. Таким образом, возникает вопрос о расположении на комплексной плоскости особых точек функции (7).

Известно [6, 7], что особенность функции (5) в точке $p = 0$ устранима. Это используется при выводе формулы (5), но может быть легко проверено непосредственно.

Представим (7) в виде

$$\tilde{P}(p) = \frac{1}{p} - \frac{(c - \lambda(x_0 + \theta))(1 + \theta p)}{(1 + \theta p)(cp - \lambda) + \lambda e^{-px_0}} \quad (11)$$

и введем обозначения

$$z = px_0, \; k_1 = \frac{\theta}{x_0}, \; k_2 = \frac{c}{\lambda x_0}.$$

Тогда знаменатель второй дроби, стоящей в правой части (11), принимает вид $\lambda f(z)$, где

$$f(z) = (1 + k_1 z)(k_2 z - 1) + e^{-z}, \quad (12)$$

а условие нормального функционирования компании (6) принимает вид

$$k_2 > 1 + k_1.$$

Из курса математического анализа имеем, что если $k_2 > 1 + k_1$, то функция (12) имеет два вещественных нуля, тривиальный $z = 0$ и отрицательный. Обозначим этот нуль x_1 (см. рис. 1).

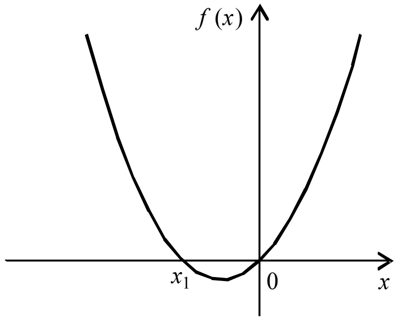

Рис. 1. График функции $f(x)$

Покажем, что если $k_2 > 1 + k_1$, то функция (12) не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и полосе $x_1 < \operatorname{Re} z < 0$, имеет единственный нуль $z = 0$ на прямой $\operatorname{Re} z = 0$ и единственный нуль $z = x_1$ на прямой $\operatorname{Re} z = x_1$.

Достаточно рассмотреть верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$. Пусть $z = x + iy$. Тогда уравнение $f(z) = 0$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} k_1 k_2 (x^2 - y^2) + (k_2 - k_1)x - 1 + e^{-x} \cos y = 0, \\ 2k_1 k_2 xy + (k_2 - k_1)y - e^{-x} \sin y = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Докажем, что в области $x \ge x_1$, $y > 0$ система (13) решений не имеет.

Пусть $x \ge 0$, $y > 0$. Представим второе уравнение в системе (13) в виде

$$e^x (2k_1 k_2 x + k_2 - k_1) = \frac{\sin y}{y}. \tag{14}$$

Из предположений и курса математического анализа имеем

$$e^x (2k_1 k_2 x + k_2 - k_1) \ge k_2 - k_1 > 1 > \frac{\sin y}{y},$$

поэтому равенство (14) выполняться не может. Следовательно, точка (x, y) не является решением системы (13).

Пусть $x_1 \le x < 0$, $y > 0$. Тогда $f(x) \le 0$ (см. рис. 1), поэтому

$$k_1 k_2 (x^2 - y^2) + (k_2 - k_1)x - 1 + e^{-x} \cos y < k_1 k_2 x^2 + (k_2 - k_1)x - 1 + e^{-x} = f(x) \le 0,$$

то есть в системе (13) не выполняется первое равенство, точка (x, y) решением системы (13) не является.

Таким образом, наибольшую вещественную часть среди особых точек функции (7), кроме точки $p = 0$, имеет точка $p_0 = \dfrac{x_1}{x_0}$. Это полюс первого порядка, поэтому [9]

$$\operatorname*{res}_{p=p_0} \tilde{P}(p) e^{pS} = \left(-\frac{(c - \lambda(x_0 + \theta))(1 + \theta p)}{2c\theta p + c - \lambda\theta - \lambda x_0 e^{-p x_0}} e^{pS} \right) \Bigg|_{p x_0 = x_1}.$$

Следовательно, при $S \to \infty$

$$P(S) \sim \frac{(c-\lambda(x_0+\theta))(x_0+\theta x_1)}{\lambda x_0(\theta + x_0 e^{-x_1}) - c(x_0+2\theta x_1)} e^{\frac{x_1}{x_0}S}, \qquad (15)$$

где $x_1 < 0$ – отрицательный нуль функции (12).

На рис. 2 представлены графики функций (9) и (15) при значениях параметров $c = 10$, $\lambda = 2$, $\theta = 1$, $x_0 = 2$.

Рис. 2. Вероятность разорения страховой компании и ее асимптотика

Заключение

В работе операционным методом получено точное решение уравнения для вероятности разорения компании в случае выплат, имеющих экспоненциальное распределение со сдвигом. Исследовано расположение на комплексной плоскости особых точек изображения (преобразования Лапласа) вероятности разорения компании и получена ее асимптотика при больших значениях капитала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глухова Е.В., Капустин Е.В.* Расчет вероятности разорения страховой компании с учетом перестраховки // Изв. вузов. Физика. 2000. № 4. С.3–9.
2. *Глухова Е.В., Капустин Е.В.* Расчет вероятности разорения страховой компании с учетом перестраховки при пуассоновском потоке страховых взносов // Статистическая обработка данных и управление в сложных системах: сб. статей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 34–46.
3. *Глухова Е.В., Капустин Е.В., Терпугов А.Ф.* Расчет вероятности разорения страховой компании с учетом банковского процента // Методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике: Материалы междунар. научно-практич. конф. Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. Новочеркасск: НАБЛА, 2001. Ч. 3. С. 36–38.
4. *Капустин Е.В.* Расчет вероятности разорения для модели страховой компании, учитывающей возможность одновременного наступления нескольких страховых случаев // Обработка данных и управление в сложных системах: сб. статей / под ред. А.Ф. Терпугова. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 188–195.

5. *Капустин Е.В.*, *Михайленко М.С.* Модель страховой компании с пуассоновским потоком взносов и с учетом издержек, равномерных по времени // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2010): Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (19–20 ноября 2010 г.). Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. Ч. 1. С. 13–16.
6. *Глухова Е.В.*, *Змеев О.А.*, *Лившиц К.И.* Математические модели страхования. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. 180 с.
7. *Panjer H.H.*, *Willmot G.E.* Insurance Risk Models. Society of Actuaries, Schaumburg, Ill. 1992. 442 p.
8. *Штрауб Э.* Актуарная математика имущественного страхования. М.: Мир, 1988. 146 с.
9. *Лаврентьев М.А.*, *Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

Капустин Евгений Викторович
Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске
E-mail: kapustin@asf.ru
Поступила в редакцию 5 мая 2012 г.

Kapustin Eugene V. (Anjero-Sudjensk branch of the Kemerovo Staty University). **Calculation of the ruin probability of an insurance company when claim size distribution is exponential with a shift.**

Keywords: risk model, the ruin probability, asymptotic behavior.

The paper considers the model of the insurance company when premium rate is constant, flow of claims is generated by Poisson process (the classical risk model) and claim sizes have probability density

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x - x_0}{\theta}}, & if \quad x > x_0, \\ 0, & if \quad x < x_0. \end{cases}$$

The ruin probability of the company and its asymptotic behavior for large values of initial capital are obtained by operational calculus.