УДК 519.21

А.М. Горцев, М.А. Леонова, Л.А. Нежельская

СРАВНЕНИЕ МП- И ММ-ОЦЕНОК ДЛИТЕЛЬНОСТИ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В ОБОБЩЕННОМ АСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ[1]

Изучается обобщенный асинхронный поток событий, являющийся одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок в цифровых сетях интегрального обслуживания (ЦСИО). Поток функционирует в условиях непродлевающегося мертвого времени, когда длительность мертвого времени – неизвестная фиксированная величина. Проводится сравнение качества получаемых (по наблюдениям за моментами наступления событий потока) оценок длительности мертвого времени методом максимального правдоподобия (МП-оценки) и методом моментов (ММ-оценки).

Ключевые слова: *обобщенный асинхронный поток событий, непродлевающееся мертвое время, МП-оценки, ММ- оценки, длительность мертвого времени.*

Настоящая статья является продолжением исследований обобщенного асинхронного потока событий (далее – поток), начатых в статьях [1–5]. Изучаемый поток относится к классу дважды стохастических потоков событий, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний, и является одной из адекватных математических моделей информационных потоков сообщений, функционирующих в ЦСИО [6]. Этот класс потоков принято называть МС – потоками либо MAP – потоками событий. В [7] приведена классификация МС-потоков событий и установлена связь между МС-потоками и MAP-потоками событий. Наиболее полная литература по изучаемым типам МС-потоков приведена в [8].

В реальных ситуациях функционирование систем массового обслуживания, в частности ЦСИО, осложнено тем, что последнее, как правило, происходит в условиях частичной либо полной неопределенности относительно параметров или состояний информационных потоков сообщений. В таких ситуациях наиболее рациональным является применение адаптивных систем массового обслуживания, которые в процессе функционирования оценивают неизвестные параметры либо состояния входящих потоков событий и изменяют дисциплины обслуживания в соответствии с полученными оценками [9]. Вследствие этого возникают задачи оценки состояний [10] и оценки параметров [11] по наблюдениям за моментами наступления событий.

Одним из факторов, влияющим на потерю событий, в частности в ЦСИО, является мертвое время регистрирующих приборов [12], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). В качестве примера приведем протокол CSMA/CD – протокол случай-

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2012–2014 годы, задание 8.4055.2011.

ного множественного доступа с обнаружением конфликта, широко используемого в компьютерных сетях. В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети по сети рассылается сигнал «заглушки» («пробки»); в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мертвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети.

Для того чтобы оценить потери событий потока, возникающие из-за эффекта мертвого времени, необходимо оценить его длительность.

В настоящей статье производится сравнение оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий, полученных методом максимального правдоподобия (МП-оценки) и методом моментов (ММ-оценки).

1. Постановка задачи

Рассматривается обобщенный асинхронный дважды стохастический поток событий, интенсивность которого есть кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i, $i = 1, 2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе (из второго в первое) может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i-м состоянии распределена по экспоненцильному закону с параметром α_i, $i = 1, 2$. При переходе процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе инициируется с вероятностью p $(0 \le p \le 1)$ дополнительное событие во втором состоянии (т.е. сначала осуществляется переход, а затем инициируется дополнительное событие). Наоборот, при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется с вероятностью q $(0 \le q \le 1)$ дополнительное событие в первом состоянии. При этом блочная матрица инфинитезимальных коэффициентов примет вид

$$D = \left\| \begin{array}{cc|cc} -(\lambda_1+\alpha_1) & (1-p)\alpha_1 & \lambda_1 & p\alpha_1 \\ (1-q)\alpha_2 & -(\lambda_2+\alpha_2) & q\alpha_2 & \lambda_2 \end{array} \right\| = \| D_0 | D_1 \|.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – марковский процесс. После каждого зарегистрированного в момент времени t_i события наступает время фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного потока недоступны наблюдению. События, наступившие в течение мертвого времени, не вызывают продления его периода (непродлевающееся мертвое время). По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени T и т.д. Вариант возникающей ситуации показан на рис. 1, где 1, 2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; дополнительные события, которые могут наступать в момент перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние, помечены буквами p либо q; штриховка – периоды мертвого времени длительности T; $t_1, t_2, \ldots$ – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков и дополнительные события) являются принципиально ненаблюдаемыми, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий $t_1, t_2,\ldots$ наблюдаемого потока. Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования наблюдаемого потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t), где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений, пренебрегаем. Необходимо в момент окончания наблюдений (в момент времени t) осуществить методом максимального правдоподобия и методом моментов оценку $\hat{T}$ длительности мертвого времени и произвести сравнение получаемых оценок.

2. МП-оценка длительности мертвого времени

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ $(k = 1,2,\ldots)$ – значение длительности k-го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ($\tau_k > 0$). Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности k-го интервала $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятностей зависит от длительности мертвого времени). В силу этого момент t_k без потери общности можно положить равным нулю или, что то же самое, момент наступления события наблюдаемого потока есть $\tau = 0$. Тогда плотность вероятностей примет вид [2]

$$p_T(\tau)=0,\ \ 0\le\tau<T;\ \ p_T(\tau)=\frac{z_1}{z_2-z_1}\left[z_2-\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}f(T)\right]e^{-z_1(\tau-T)}-$$

$$-\frac{z_2}{z_2-z_1}\left[z_1-\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}f(T)\right]e^{-z_2(\tau-T)},\ \tau\ge T,$$

$$f(T)=\alpha+\lambda\psi(T)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T},\ \psi(T)=1\Big/\left[z_1z_2-(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right],$$

$$\lambda=\alpha_1\alpha_2(\lambda_1+p\alpha_1-\lambda_2-q\alpha_2)(\lambda_1+q\alpha_1-\lambda_2-p\alpha_2),$$
$$\alpha=\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\alpha_1+(p+q)\alpha_1\alpha_2,$$

$$z_{1,2}=\left[\lambda_1+\lambda_2+\alpha_1+\alpha_2\mp\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2)^2+4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}\right]\Big/2;$$
$$0<z_1<z_2. \tag{1}$$

В (1) принимается, что $\lambda \neq 0, (\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2) \neq 0$. Подчеркнем, что (1) – одномерная плотность вероятностей.

Пусть $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$, … , $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ – последовательность измеренных (в результате наблюдения за потоком в течение интервала наблюдения $(0, t)$) значений длительностей интервалов между соседними событиями потока. Упорядочим величины τ_1 , … , τ_k по возрастанию: $\tau_{\min} = \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \ldots < \tau^{(k)}$. В силу предпосылок последовательность моментов наступления событий $t_1, t_2,\ldots, t_k, \ldots$ образует вложенную цепь Маркова, т.е. наблюдаемый поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента t_k , $k = 1,2,\ldots$. Тогда [13] функция правдоподобия, с учетом (1), запишется в виде

$$L(\lambda_i, \alpha_i, p, q, T \mid \tau^{(1)},\ldots,\tau^{(k)}) = 0, \quad 0 \le \tau_{\min} < T;$$

$$L(\lambda_i, \alpha_i, p, q, T \mid \tau^{(1)},\ldots,\tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^{k} p_T(\tau^{(j)}), \quad \tau_{\min} \ge T.$$

Так как поставленная задача заключается в построении оценки $\hat{T}$ длительности мертвого времени (в предположении, что остальные параметры потока λ_i, α_i, $i = 1,2$, p, q известны), то, согласно методу максимального правдоподобия, ее реализация есть решение оптимизационной задачи:

$$L(T \mid \tau^{(1)},\ldots,\tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^{k} p_T(\tau^{(j)}) = \prod_{j=1}^{k}\left\{\frac{z_1}{z_2 - z_1}\left[z_2 - \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2} f(T)\right] e^{-z_1(\tau^{(j)}-T)} -\right.$$

$$\left. - \frac{z_2}{z_2 - z_1}\left[z_1 - \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2} f(T)\right] e^{-z_2(\tau^{(j)}-T)}\right\} \Rightarrow \max_{T}, 0 \le T < \tau_{\min}, \tag{2}$$

где z_1, z_2, $f(T)$ определены в (1).

Значение T, при котором (2) достигает своего глобального максимума, есть $\hat{T}_{\text{МП}}$ – оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени.

В [5] аналитически строго решена оптимизационная задача (2): при любых значениях параметров потока $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \ge 0$ $(\lambda_1 > \lambda_2)$, $0 \le p \le 1$, $0 \le q \le 1$, $\alpha_i > 0$, $i = 1,2$, МП-оценка $\hat{T}_{\text{МП}} = \tau_{\min}$. Таким образом, в процессе наблюдения (в течение временного интервала (t, t_0)) потока событий вычисляются величины τ_k, $k = \overline{1,n}$, после чего находится $\tau_{\min} = \min \tau_k$ ($k = \overline{1,n}$) и полагается $\hat{T}_{\text{МП}} = \tau_{\min}$.

3. ММ-оценка длительности мертвого времени

В [2] показано, что обобщенный асинхронный поток событий, функционирующий в условиях мертвого времени, в общем случае является коррелированным потоком. Только в частных случаях [3] поток становится рекуррентным.

Пусть (t_k , t_{k+1}), (t_{k+1} , t_{k+2}) – два смежных интервала в наблюдаемом потоке с соответствующими значениями длительностей: $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$; их расположение на временной оси, в силу стационарности потока, произвольно. Тогда можно положить $k = 1$ и рассматривать соседние интервалы (t_1, t_2), (t_2 , t_3) с соответствующими значениями длительностей: $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$; $\tau_1 \ge 0$, $\tau_2 \ge 0$. При этом $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события наблюдаемого потока; $\tau_2 = 0$ – моменту t_2 наступления следующего события наблюдаемого потока.

Соответствующая совместная плотность вероятностей при этом есть $p_T(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \ge 0$, $\tau_2 \ge 0$ [2]:

$$p_T(\tau_1,\tau_2)=0; \quad 0\le\tau_1<T, \quad 0\le\tau_2<T,$$
$$p_T(\tau_1,\tau_2)=p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)+$$
$$+C_T\left[z_1e^{-z_1(\tau_1-T)}-z_2e^{-z_2(\tau_1-T)}\right]\left[z_1e^{-z_1(\tau_2-T)}-z_2e^{-z_2(\tau_2-T)}\right], \quad \tau_1\ge T, \quad \tau_2\ge T,$$

$$C_T=e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\frac{\alpha_1\alpha_2(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)(\lambda_1-\lambda_2+p\alpha_1-q\alpha_2)(\lambda_1-\lambda_2+q\alpha_1-p\alpha_2)}{\left[(z_2-z_1)(\alpha_1+\alpha_2)(z_1z_2-(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T})\right]^2}\times$$

$$\times\left\{z_1z_2-[2z_1z_2-(\alpha_1+\alpha_2)(z_1+z_2)]e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}+[z_1z_2-(\lambda_1+\lambda_2)(\alpha_1+\alpha_2)]e^{-2(\alpha_1+\alpha_2)T}\right\}, \quad (3)$$

где z_1, z_2, $p_T(\tau_k)$ определены в (1) для $\tau=\tau_k$, $k=1, 2$.

Теоретическая ковариация значений τ_1 и τ_2 запишется в виде

$$\operatorname{cov}(\tau_1,\tau_2)=\int_T^\infty\int_T^\infty \tau_1\tau_2 p_T(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2-\left[\int_T^\infty \tau p_T(\tau)d\tau\right]^2. \quad (4)$$

Подставляя (1), (3) в (4), находим явный вид теоретической ковариации:

$$\operatorname{cov}(\tau_1,\tau_2)=\left(\frac{z_2-z_1}{z_1z_2}\right)^2 C_T, \quad (5)$$

где C_T определена в (3).

Пусть за время наблюдения (в течение временного интервала (t_0, t)) реализовалось n интервалов (t_k, t_{k+1}) длительности τ_k, $k=\overline{1,n}$. Введем статистику

$$\widehat{\operatorname{cov}}(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\tau_k\tau_{k+1}-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tau_k\right)^2, \quad (6)$$

являющуюся оценкой теоретической ковариации (5). Тогда, согласно методу моментов [13], уравнение моментов, учитывающее коррелированность потока событий, запишется в виде

$$\left(\frac{z_2-z_1}{z_1z_2}\right)^2 C_T=\widehat{\operatorname{cov}}(\tau_1,\tau_2). \quad (7)$$

Подставляя в (7) выражение C_T из (3), вводя новую переменную $x=e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}$ и проделывая при этом необходимые преобразования, находим (7) в виде

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,$$
$$a=h[z_1z_2-(\lambda_1+\lambda_2)(\alpha_1+\alpha_2)];$$
$$b=-\left\{h[2z_1z_2-(\alpha_1+\alpha_2)(z_1+z_2)]+(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)^2\,\widehat{\operatorname{cov}}(\tau_1,\tau_2)\right\};$$
$$c=z_1z_2\left[h+2(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)\widehat{\operatorname{cov}}(\tau_1,\tau_2)\right]; \quad d=-(z_1z_2)^2\,\widehat{\operatorname{cov}}(\tau_1,\tau_2);$$

$$h=\frac{\alpha_1\alpha_2}{[z_1z_2(\alpha_1+\alpha_2)]^2}(\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2)(\lambda_1-\lambda_2+p\alpha_1-q\alpha_2)(\lambda_1-\lambda_2+q\alpha_1-p\alpha_2). \quad (8)$$

Решение уравнения (8) определит три корня $x_i, i = 1,2,3,$ которые, в свою очередь, определят три ММ-оценки длительности мертвого времени

$$\hat{T}_{MM}{}^{(i)} = -\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \ln x_i, \, i = 1,2,3.$$

Алгоритм нахождения единственной оценки $\hat{T}_{\text{MM}}$ следующий:

1) для определенного набора параметров λ_i, α_i, i = 1,2, p, q, T ед. времени, осуществляется в течение T_m ед. времени имитационное моделирование наблюдаемого потока событий;

2) результатом работы имитационной модели является оценка теоретической ковариации (6), где n принимает одно из целых значений $(n \geq 2)$;

3) решается кубическое уравнение (8), т. е. находятся корни x_1, x_2, x_3;

4) если все корни комплексные, то $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\min}$;

5) выделяются вещественные корни; здесь возможны три случая:

5.1) вещественный корень один – x_1, тогда:

а) если $x_1 \leq 0$, то $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\min}$;

б) если $x_1 > 0$, то б.1) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}{}^{(1)} > \tau_{\min}$, б.2) $\hat{T}_{\text{MM}} = \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(1)}$, если $0 < \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(1)} \leq \tau_{\min}$, б.3) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}{}^{(1)} \leq 0$;

5.2) вещественных корня два – x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$, тогда:

а) если $x_1 < x_2 \leq 0$, то $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\min}$;

б) если $x_1 \leq 0 < x_2$, то б.1) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}{}^{(2)} > \tau_{\min}$, б.2) $\hat{T}_{\text{MM}} = \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(2)}$, если $0 < \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(2)} \leq \tau_{\min}$, б.3) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}{}^{(2)} \leq 0$;

в) если $0 < x_1 < x_2$, то в.1) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\min}$, если $\tau_{\min} < \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(2)} < \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(1)}$, в.2) $\hat{T}_{\text{MM}} = \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(2)}$, если $0 < \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(2)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(1)}$, в.3) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}{}^{(2)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(1)}$, в.4) $\hat{T}_{\text{MM}} = \left(\hat{T}_{\text{MM}}{}^{(1)} + \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(2)}\right)/2$, если $0 < \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(2)} <$ $< \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(1)} \leq \tau_{\min}$, в.5) $\hat{T}_{\text{MM}} = \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(1)}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}{}^{(2)} \leq 0 < \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(1)} \leq \tau_{\min}$, в.6) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}{}^{(2)} < \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(1)} \leq 0$;

5.3) вещественных корня три – x_1, x_2, x_3 $(x_1 < x_2 < x_3)$, тогда:

а) если $x_1 < x_2 < x_3 \leq 0$, то $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\min}$;

б) если $x_1 < x_2 \leq 0 < x_3$, то б.1) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}{}^{(3)} > \tau_{\min}$, б.2) $\hat{T}_{\text{MM}} = \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(3)}$, если $0 < \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(3)} \leq \tau_{\min}$, б.3) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}{}^{(3)} \leq 0$;

в) если $x_1 \leq 0 < x_2 < x_3$, то в.1) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\min}$, если $\tau_{\min} < \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(3)} < \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(2)}$, в.2) $\hat{T}_{\text{MM}} = \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(3)}$, если $0 < \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(3)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(2)}$, в.3) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}{}^{(3)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(2)}$, в.4) $\hat{T}_{\text{MM}} = \left(\hat{T}_{\text{MM}}{}^{(2)} + \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(3)}\right)/2$, если $0 < \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(3)} <$ $< \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(2)} \leq \tau_{\min}$, в.5) $\hat{T}_{\text{MM}} = \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(2)}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}{}^{(3)} \leq 0 < \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(2)} \leq \tau_{\min}$, в.6) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}{}^{(3)} < \hat{T}_{\text{MM}}{}^{(2)} \leq 0$;

г) если $0 < x_1 < x_2 < x_3$, то г.1) $\hat{T}_{ММ} = \tau_{\min}$, если $\tau_{\min} < \hat{T}_{ММ}^{(3)} < \hat{T}_{ММ}^{(2)} < \hat{T}_{ММ}^{(1)}$, г.2) $\hat{T}_{ММ} = \hat{T}_{ММ}^{(3)}$, если $0 < \hat{T}_{ММ}^{(3)} \le \tau_{\min} < \hat{T}_{ММ}^{(2)} < \hat{T}_{ММ}^{(1)}$, г.3) $\hat{T}_{ММ} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{ММ}^{(3)} \le 0 < \tau_{\min} \le \hat{T}_{ММ}^{(2)} < \hat{T}_{ММ}^{(1)}$, г.4) $\hat{T}_{ММ} = \left(\hat{T}_{ММ}^{(2)} + \hat{T}_{ММ}^{(3)}\right)/2$, если $0 < \hat{T}_{ММ}^{(3)} < \hat{T}_{ММ}^{(2)} \le \tau_{\min} < \hat{T}_{ММ}^{(1)}$, г.5) $\hat{T}_{ММ} = \hat{T}_{ММ}^{(2)}$, если $\hat{T}_{ММ}^{(3)} \le 0 < \hat{T}_{ММ}^{(2)} \le$ $\le \tau_{\min} < \hat{T}_{ММ}^{(1)}$, г.6) $\hat{T}_{ММ} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{ММ}^{(3)} < \hat{T}_{ММ}^{(2)} \le 0 < \tau_{\min} \le \hat{T}_{ММ}^{(1)}$, г.7) $\hat{T}_{ММ} = \left(\hat{T}_{ММ}^{(1)} + \hat{T}_{ММ}^{(2)} + \hat{T}_{ММ}^{(3)}\right)/3$, если $0 < \hat{T}_{ММ}^{(3)} < \hat{T}_{ММ}^{(2)} < \hat{T}_{ММ}^{(1)} \le \tau_{\min}$, г.8) $\hat{T}_{ММ} = \left(\hat{T}_{ММ}^{(1)} + \hat{T}_{ММ}^{(2)}\right)/2$, если $\hat{T}_{ММ}^{(3)} \le 0 < \hat{T}_{ММ}^{(2)} < \hat{T}_{ММ}^{(1)} \le \tau_{\min}$, г.9) $\hat{T}_{ММ} = \hat{T}_{ММ}^{(1)}$, если $\hat{T}_{ММ}^{(3)} < \hat{T}_{ММ}^{(2)} \le 0 < \hat{T}_{ММ}^{(1)} \le \tau_{\min}$, г.10) $\hat{T}_{ММ} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{ММ}^{(3)} < \hat{T}_{ММ}^{(2)} < \hat{T}_{ММ}^{(1)} \le 0 < \tau_{\min}$.

В результате работы алгоритма осуществляется один из описанных вариантов, тем самым определится единственная ММ-оценка $\hat{T}_{ММ}$ длительности мертвого времени.

4. Численное сравнение МП- и ММ-оценок

Для получения численных результатов разработан алгоритм вычисления МП- и ММ-оценок. Программа расчета реализована на языке программирования C++ в среде Builder 6. Первый этап расчета предполагает имитационное моделирование (при заданных значениях параметров λ_i, α_i, $i = 1{,}2$, p, q, T ед. времени и заданном времени моделирования T_m ед. времени) наблюдаемого потока событий. Описание алгоритма имитационного моделирования, хотя алгоритм достаточно трудоемок, здесь не приводится, так как никаких принципиальных трудностей алгоритм не содержит. Результатом работы имитационной модели является последовательность значений длительностей временных интервалов $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ ($n = 2, 3, \ldots$). Второй этап расчета – непосредственное вычисление МП-оценок и ММ-оценок. Коротко опишем второй этап: 1) находится оценка $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$ ($\tau_{\min} = \min \tau_k$, $k = \overline{1,n}$) ; 2) вычисляется оценка (6); 3) решается уравнение (8); 4) осуществляется алгоритм нахождения единственной оценки $\hat{T}_{ММ}$; 5) вычисляются величины $\Delta\hat{T}_{МП} = (\hat{T}_{МП} - T)^2$, $\Delta\hat{T}_{ММ} = (\hat{T}_{ММ} - T)^2$, где T – истинное значение длительности мертвого времени, заданное на первом этапе расчета при осуществлении имитационного моделирования.

Для сравнения качества МП-оценок и ММ-оценок проведен статистический эксперимент, состоящий из следующих этапов: 1) для заданного набора параметров λ_i, α_i, $i = 1{,}2$, p, q, T ед. времени осуществляется моделирование наблюдаемого потока событий для заданного T_m ед. времени (отдельный j-й эксперимент, $j = 1, 2, \ldots$); 2) осуществляется расчет оценок $\hat{T}_{МП}^{(j)}, \hat{T}_{ММ}^{(j)}$ для j-го эксперимента; 3) вычисляются величины $\Delta\hat{T}_{МП}^{(j)}$, $\Delta\hat{T}_{ММ}^{(j)}$ для j-го эксперимента; 4) осуществляется повторение N раз ($j = \overline{1,N}$) шагов 1–3.

Результатом выполнения описанного алгоритма являются две выборки $(\hat{T}_{МП}^{(1)}, \hat{T}_{МП}^{(2)}, \ldots, \hat{T}_{МП}^{(N)})$, $(\hat{T}_{ММ}^{(1)}, \hat{T}_{ММ}^{(2)}, \ldots, \hat{T}_{ММ}^{(N)})$, на основании которых вычисляются выборочные вариации получаемых оценок:

$$\hat{V}_{\text{МП}} = (1/N)\sum_{j=1}^{N}\Delta\hat{T}_{\text{МП}}^{(j)},\ \hat{V}_{\text{ММ}} = (1/N)\sum_{j=1}^{N}\Delta\hat{T}_{\text{ММ}}^{(j)}.$$

Путем сравнения значений выборочных вариаций устанавливается, какая из оценок при заданных параметрах лучше, какая хуже: если $\hat{V}_{\text{МП}} \le \hat{V}_{\text{ММ}}$, то МП-оценка лучше ММ-оценки, если наоборот, то ММ-оценка лучше МП-оценки. Отметим, что по определению МП – оценка при конечных T_m будет всегда смещенная ($\tau_{\min} > T$); ее несмещенность реализуется только в асимптотическом случае при $T_m \to \infty$.

Результаты статистического эксперимента приведены в табл. 1–8. В первой строке таблиц указана длительность имитационного моделирования T_m (T_m =10, 20, …, 50 ед. времени в табл. 1–4; T_m = 600, 700, …, 1000 ед. времени в табл. 5–8). Во второй и третьей строках таблиц для каждой длительности имитационного моделирования T_m приведены численные значения для $\hat{V}_{\text{МП}}$ и $\hat{V}_{\text{ММ}}$ соответственно. В четвертой строке таблиц для каждой длительности имитационного моделирования приведены численные значения разности $\hat{V}_{\text{МП}} - \hat{V}_{\text{ММ}}$. Численные результаты во всех таблицах получены для $N = 100$.

Таблица 1

Результаты статистического эксперимента
(λ_1 = 2,1, λ_2=0,5, α_1=1, α_2=0,9, p=0,1, q=0,1, T=0,4)

T_m	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{\text{МП}}$	0,01732	0,00488	0,00053	0,00047	0,00034
$\hat{V}_{\text{ММ}}$	0,01717	0,00471	0,00030	0,00019	$6\cdot10^{-5}$
$\hat{V}_{\text{МП}} - \hat{V}_{\text{ММ}}$	0,00015	0,00017	0,00023	0,00025	0,00028

Таблица 2

Результаты статистического эксперимента
(λ_1 = 1, λ_2=0,5, α_1=0,1, α_2=0,2, p=0,1, q=0,1, T=1)

T_m	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{\text{МП}}$	0,02553	0,00184	0,00089	0,00086	0,00046
$\hat{V}_{\text{ММ}}$	0,02553	0,00184	0,00089	0,00086	0,00046
$\hat{V}_{\text{МП}} - \hat{V}_{\text{ММ}}$	0	0	0	0	0

Таблица 3

Результаты статистического эксперимента
(λ_1 = 1,9, λ_2=0,7, α_1=2,1, α_2=0,15, p=0,4, q=0,7, T=0,4)

T_m	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{\text{МП}}$	0,00213	0,00141	0,00057	0,00048	0,00036
$\hat{V}_{\text{ММ}}$	0,00201	0,00118	0,00031	0,00021	$2{,}23\cdot10^{-5}$
$\hat{V}_{\text{МП}} - \hat{V}_{\text{ММ}}$	0,00012	0,00023	0,00026	0,00027	0,00034

Таблица 4

Результаты статистического эксперимента
($\lambda_1 = 2,1$, $\lambda_2=0,3$, $\alpha_1=1,5$, $\alpha_2=0,1$, $p=0,2$, $q=0,9$, $T=0,4$)

T_m	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	0,00215	0,00101	0,00061	0,00057	0,00048
$\hat{V}_{ММ}$	0,00204	0,00089	0,00036	0,00028	0,00016
$\hat{V}_{МП}-\hat{V}_{ММ}$	0,00011	0,00012	0,00025	0,00029	0,00032

Таблица 5

Результаты статистического эксперимента
($\lambda_1 = 2,1$, $\lambda_2=0,5$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=0,9$, $p=0,1$, $q=0,1$, $T=0,4$)

T_m	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	$4,215\cdot10^{-6}$	$2,185\cdot10^{-6}$	$1,761\cdot10^{-6}$	$3,346\cdot10^{-7}$	$1,065\cdot10^{-7}$
$\hat{V}_{ММ}$	$5,39\cdot10^{-5}$	$5,15\cdot10^{-5}$	$3,745\cdot10^{-5}$	$1,879\cdot10^{-5}$	$1,155\cdot10^{-5}$
$\hat{V}_{МП}-\hat{V}_{ММ}$	$-4,968\cdot10^{-5}$	$-4,931\cdot10^{-5}$	$-3,569\cdot10^{-5}$	$-1,846\cdot10^{-5}$	$-1,144\cdot10^{-5}$

Таблица 6

Результаты статистического эксперимента
($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2=0,5$, $\alpha_1=0,1$, $\alpha_2=0,2$, $p=0,1$, $q=0,1$, $T=1$)

T_m	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	$3,462\cdot10^{-5}$	$3,494\cdot10^{-6}$	$1,232\cdot10^{-6}$	$7,782\cdot10^{-7}$	$9,88\cdot10^{-8}$
$\hat{V}_{ММ}$	$3,462\cdot10^{-5}$	$3,494\cdot10^{-6}$	$1,232\cdot10^{-6}$	$7,782\cdot10^{-7}$	$9,88\cdot10^{-8}$
$\hat{V}_{МП}-\hat{V}_{ММ}$	0	0	0	0	0

Таблица 7

Результаты статистического эксперимента
($\lambda_1 = 2$, $\lambda_2=1$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=0,5$, $p=0,8$, $q=0,7$, $T=1$)

T_m	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	$2,88\cdot10^{-4}$	$5,598\cdot10^{-5}$	$1,719\cdot10^{-5}$	$5,801\cdot10^{-6}$	$7,79\cdot10^{-8}$
$\hat{V}_{ММ}$	0,09551	0,07468	0,06269	0,05331	0,05206
$\hat{V}_{МП}-\hat{V}_{ММ}$	–0,09522	–0,07462	–0,06267	–0,0533	–0,05206

Таблица 8

Результаты статистического эксперимента
($\lambda_1 = 1,9$, $\lambda_2=0,7$, $\alpha_1=2,1$, $\alpha_2=0,15$, $p=0,4$, $q=0,7$, $T=0,4$)

T_m	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	$5,01\cdot10^{-6}$	$4,81\cdot10^{-6}$	$3,5\cdot10^{-7}$	$3,2\cdot10^{-7}$	$1,3\cdot10^{-7}$
$\hat{V}_{ММ}$	$8,999\cdot10^{-6}$	$8,766\cdot10^{-6}$	$3,402\cdot10^{-6}$	$1,817\cdot10^{-6}$	$1,619\cdot10^{-6}$
$\hat{V}_{МП}-\hat{V}_{ММ}$	$-3,989\cdot10^{-6}$	$-3,956\cdot10^{-6}$	$-3,052\cdot10^{-6}$	$-1,497\cdot10^{-6}$	$-1,489\cdot10^{-6}$

Анализ приведенных численных результатов показывает: 1) при малых временах наблюдения за потоком (при малых T_m =10, 20, …, 50 ед. времени) ММ-оценки лучше МП-оценок (табл. 1, 3, 4) либо, по крайней мере, не хуже МП-оценок (табл. 2), что является вполне естественным, так как при малых временах наблюдения оценка $\hat{T}_{\text{МП}}$ может быть достаточно сильно смещенной относительно T; 2) при больших временах наблюдения за потоком (при больших T_m = 600, 700, …, 1000 ед. времени) МП-оценки лучше ММ-оценок (табл. 5, 7, 8) либо не хуже ММ-оценок (табл. 6), что также является естественным, так как при больших временах наблюдения смещение оценки $\hat{T}_{\text{МП}}$ относительно T уменьшается.

Заключение

Результаты проведенного исследования МП-оценок и ММ-оценок длительности мертвого времени T показывают общую тенденцию, что при малых временах наблюдения за потоком предпочтительнее применять оценку $\hat{T}_{\text{ММ}}$, при больших временах наблюдения – оценку $\hat{T}_{\text{МП}}$. Границу применимости той или иной оценки (при заданных значениях параметров λ_i, α_i, i = 1,2, p, q) можно определить только численно путем имитационного моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A.* An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21. Issue 3 (Jul). P. 283–290.
2. *Горцев А.М., Леонова М.А., Нежельская Л.А.* Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4(21). С. 14–25.
3. *Горцев А.М., Леонова М.А., Нежельская Л.А.* Условия рекуррентности обобщенного асинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Queues: Flows, Systems, Networks: Proc. of the Int. Conf. «Modern Probabilistic Methods for Analysis, Design and Optimization of Information and Telecommunication Networks». Minsk: BSU, 2013. P. 32–38.
4. *Леонова М.А., Нежельская Л.А.*Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2(23). С. 54–63.
5. *Леонова М.А., Нежельская Л.А.*Оценка длительности непродлевающегося мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Изв. вузов. Физика. 2013. Т. 56. № 9/2. С. 220–222.
6. *Дудин А.Н., Клименок В.И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
7. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 13–21.
8. *Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А.* Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 66–81.
9. *Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Управление и адаптация в системах массового обслуживания. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1978. 208 с.

10. *Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A., Soloviev A.A.* Optimal state estimation in MAP event flows with unextendable dead time // Automation and Remote Control. 2012. V. 73. No. 8. P. 1316–1326.
11. *Бушланов И.В., Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 76–93.
12. *Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф.* Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск: Изд-во «Университетское», 1988. 254 с.
13. *Шуленин В.П.* Математическая статистика. Часть 1. Томск: Изд-во НТЛ, 2012. 540 с.

Горцев Александр Михайлович
Леонова Мария Алексеевна
Нежельская Людмила Алексеевна
Томский государственный университет
E-mail: gam@mail.fpmk.tsu.ru;
mleonova86@mail.ru; ludne@mail.ru
Поступила в редакцию 5 апреля 2013 г.

Gortsev Alexander M., Leonova Maria A., Nezhelskaya Lyudmila A. (Tomsk State University).
The comparison of maximum likelihood estimation and method of moments estimation of dead time value in a generalized asynchronous flow of events.

Keywords: generalized asynchronous flow of events, unprolonging dead time, maximum likelihood estimation, method of moments estimation, dead time value.

Generalized asynchronous flow of events which intensity is piecewise constant stochastic process $\lambda(t)$ with two states λ_1 and λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) and unprolonging dead time is considered. During the time interval when $\lambda(t) = \lambda_i$, Poisson flow of events takes place with the intensity λ_i, $i = 1,2$. Transition from the first state of process $\lambda(t)$ into the second one (from the second state into the first one) is carried out at any moment of time. The sojourn time in the i-th state is exponentially distributed with parameter α_i, $i = 1,2$. The process of transition $\lambda(t)$ from the first state into the second one initiates with probability p ($0 \le p \le 1$) extra event in the second state. Also the process of transition $\lambda(t)$ from the second state into the first one initiates with probability вероятностью q ($0 \le q \le 1$) extra event in the second state.

The flow is functioning in conditions of unprolonging dead time (the value of dead time is fixed). We solve the problem of estimation of dead time by using the likelihood function and the method of moments. The comparison of the quality of estimation of dead time value shows which estimator is better.