УДК 519.87

СТРУКТУРНЫЕ И КОММУНИКАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ЦИРКУЛЯНТНЫХ СЕТЕЙ

Э. А. Монахова

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия

E-mail: emilia@rav.sscc.ru

Циркулянтные сети интенсивно исследуются последние 30 лет и находят широкое применение в различных областях информатики и дискретной математики. По ним два обзора было опубликовано на английском языке (Дж.-К. Бермонда, Ф. Комелласа и Д. Ф. Хсу в 1995 г. и Ф. К. Хванга в 2003 г.) и один на русском языке (О. Г. Монахова и Э. А. Монаховой, 2000 г.). Настоящий обзор дополнительно включает результаты, которые не были отражены в упомянутых источниках, а также новые результаты, полученные в области исследования неориентированных циркулянтных сетей в последние годы.

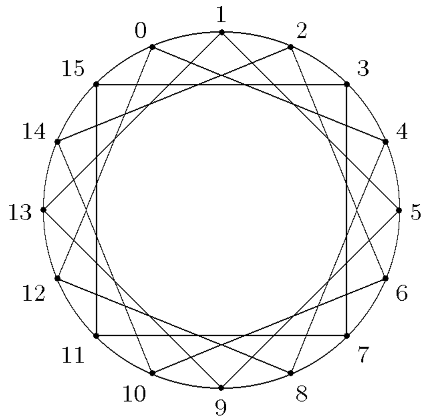
Ключевые слова: *сети связи, циркулянтные графы, диаметр, маршрутизация, трансляционные и полные обмены.*

Введение

Циркулянтные сети (графы) и их разнообразные приложения являются объектом интенсивных исследований в информатике и дискретной математике (см., например, [33, 38, 40, 65, 75, 81, 88, 89, 103, 105, 111]). Они находят приложение в проектировании вычислительных сетей, сетей передачи данных и распределенных вычислениях. Циркулянтные графы реализованы как коммуникационные сети в параллельных вычислительных системах ILLIAC-IV, MPP, Intel Paragon, Cray T3D, SONET, отечественной системе МИКРОС и др., использовались также в качестве структур многомодульной высокоскоростной памяти вычислительных систем [106]. В настоящее время расширяются возможности практического применения циркулянтных сетей и их обобщений — как основы структуры в мультипроцессорных кластерных системах [86], в модели «малого мира» (small-world networks) [45], оптических сетях [91], моделях химических реакций [29], клеточных нейронных сетях [23], что объясняется высокими показателями надежности, наращиваемости, модульности и связности этих графов. Важным приложением двумерных и трехмерных циркулянтных графов является их использование в теории кодирования при построении совершенных кодов, исправляющих ошибки [11, 78].

Определение 1. Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_k$, n — целые числа, такие, что $1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_k < n$. Неориентированный граф C с множеством вершин $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и множеством ребер $E = \{(i,j) : |i-j| \equiv s_m \pmod n, m = 1, \ldots, k\}$, называется *циркулянтной* сетью.

Другими словами, циркулянтный граф есть граф Кэли, чья матрица смежности есть циркулянт. Элементы порождающего множества $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ называются *образующими* (хордами). Параметрическое описание вида $(n; S)$ полностью определяет циркулянт порядка n и *размерности* k. Степень циркулянта равна $2k$, если $s_k \neq n/2$. Если n четное и $s_k = n/2$, то циркулянт имеет степень $2k-1$. Каждое $s_i \in S$, взаимно простое с n, влечет гамильтонов цикл в графе. Примеры циркулянтов размерностей 2 и 3 показаны на рис. 1.



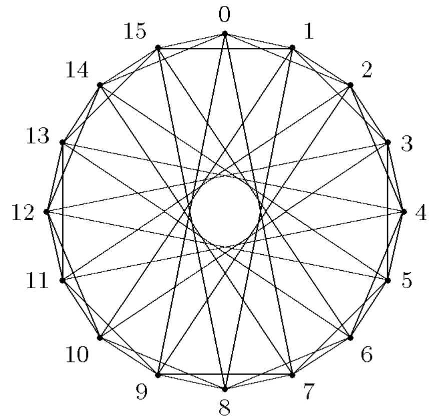


Рис. 1. Циркулянты $C(16; 1, 4)$ и $C(16; 1, 2, 7)$

Согласно Ф. Дэвису [47], циркулянты как математический объект введены Э. Каталаном в 1846 г. Циркулянтные графы также известны в зарубежной литературе как звездные многоугольники (star-polygon graphs, point-symmetric graphs) [108], циклические графы (cyclic graphs) [46, 56], распределенные кольцевые сети (distributed loop networks, multi-loop networks) [33, 35, 41, 49, 65, 87, 115], хордальные кольца (chordal rings) [30, 39, 73, 90, 91], multiple fixed step graphs [52, 72], в отечественной литературе — как D_n-графы (диофантовы структуры) [3, 14, 15].

Впервые циркулянтные графы получили пристальное внимание как перспективные сети связи однородных вычислительных систем в [3, 4, 7, 9, 14]. Результаты сравнения циркулянтных сетей с рядом популярных топологий вычислительных систем, в том числе с гиперкубами, показали [21], что они являются лучшей топологией вычислительных систем, чем гиперкубы, по показателям структурной живучести, надежности и связности, а также требуют меньшего числа межпроцессорных обменов при решении вычислительных задач и задач системного управления.

В настоящей работе рассматриваются только неориентированные циркулянты. В литературе изучается также их ориентированный вариант (см., например, обзоры в [33, 60, 64, 65]): в графе $G(n; s_1, s_2, \ldots, s_k)$ с множеством вершин $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ каждая вершина i связана с k вершинами $i + s_1$, $i + s_2$, ..., $i + s_k \pmod{n}$.

1. Основные свойства циркулянтов

Прежде всего нас интересуют только связные циркулянты. Граф называется связным, если существует по крайней мере один путь между любыми двумя его вершинами. В дальнейшем под (a, b) понимается наибольший общий делитель чисел a и b.

В [3, 37] показано, что циркулянтный граф $C(n; S)$ является связным, если и только если $(s_1, s_2, \ldots, s_k, n) = 1$. Для $k = 2$ в [34] доказано, что если $(n, s_1, s_2) = 1$, то циркулянт $C(n; s_1, s_2)$ может быть разложен на два гамильтоновых цикла.

Лемма 1 [87]. Если $(n, s_1) = 1$, то в циркулянтном графе $C(n; s_1, s_2)$ существует гамильтонов цикл, использующий только образующую s_1.

В [37] аналогичное свойство доказано для циркулянтов любой степени. Тем не менее циркулянт может быть связным и иметь гамильтонов цикл, но не иметь гамильтонова цикла, порожденного одной из образующих (например, граф $C(24; 3, 4)$).

При решении проблем синтеза и выбора структур вычислительных систем важным является вопрос об изоморфизме графов. Из симметрии циркулянтов вытекает

Лемма 2 [3, 108]. Циркулянты $C(n; s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_k)$ и $C(n; s_1, \ldots, n - s_i, \ldots, s_k)$ изоморфны.

Это свойство позволяет ограничиться рассмотрением циркулянтных графов с образующими, не превосходящими $\lfloor n/2 \rfloor$.

Лемма 3 [3, 26, 108]. Если $(n, t) = 1$, то $C(n; s_1, s_2, \ldots, s_k)$ и $C(n; ts_1, ts_2, \ldots, ts_k)$ изоморфны (образующие ts_i, $i = 1, \ldots, k$, взяты по модулю n).

Важными метрическими характеристиками графа являются диаметр и среднее расстояние (соответствуют максимальной и средней структурным задержкам в сети).

Определение 2. *Диаметром* графа C называется $\mathrm{d}(n; S) = \max\limits_{i,j \in V} \mathrm{d}(i, j)$, где $\mathrm{d}(i, j)$ — длина кратчайшего пути между вершинами i и j, принадлежащими C.

При фиксированном k пусть $D(n)$ означает точную нижнюю границу диаметра для любого n. Заметим, что $\mathrm{d}_{\min}(n) = \min\limits_{S}\{\mathrm{d}(n; S)\} \geqslant D(n)$ для любого n. В [14, 41, 49] показано, что существуют n и k, такие, что $\mathrm{d}_{\min}(n) > D(n)$.

Определение 3. Средним расстоянием (средним диаметром в некоторых источниках) графа $C(n; S)$ называется $\overline{\mathrm{d}}(n; S) = \sum\limits_{i,j} \mathrm{d}(i, j)/(n(n-1))$.

Как показали исследования, наилучшими структурами вычислительных систем по различным критериям функционирования (структурной живучести, надежности, производительности, самодиагностируемости и др.) при одинаковом числе вычислительных модулей и линий связи у каждого модуля являются структуры с минимальными диаметром и средним расстоянием [1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 24, 25].

Фундаментальная проблема теории графов — синтез оптимальных графов — состоит в поиске графов с минимальным диаметром и/или минимальным средним расстоянием среди регулярных графов с заданными степенью и числом вершин.

Рассмотрим верхнюю границу максимально возможного числа вершин в циркулянтах. Для циркулянтного графа размерности k пусть $P'(d, k)$ означает число вершин, которые находятся на расстоянии не более d от вершины 0, а $P(d, k)$ — верхнюю границу $P'(d, k)$. Пусть $S'(d, k) = P'(d, k) - P'(d-1, k)$ и $S(d, k)$ — верхняя граница $S'(d, k)$. Значение $P(d, k)$ для циркулянта диаметра d и размерности k получено Ч. К. Вонгом с соавт. [111, 112] и В. В. Корнеевым [9] (для общего случая КАИС-структур [4, 10]). При выводе выражения $P(d, k)$ в [112] рассматривается множество точек в k-мерном Евклидовом пространстве.

Лемма 4 [111]. Пусть $S(m, k) = |\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{Z}^k : \sum\limits_{i=1}^{k} |x_i| = m\}|$, где $m \geqslant 0$ — целое. Тогда

$$S(m,k) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{k-1} C_k^i C_{m-1}^{k-i-1} 2^{k-i} & \text{для } m \geqslant 1, \\ S(0,k) = 1. \end{cases}$$

Теорема 1. Пусть $P(m, k) = |\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{Z}^k : \sum\limits_{i=1}^{k} |x_i| \leqslant m\}|$, где $m \geqslant 0$ — целое. Тогда

$$P(m,k) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i C_m^{k-i} 2^{k-i}.$$

Этот результат также получили Ф. Бош и Дж. Ванг [38] и Ф. П. Муга [84].

В циркулянте размерности k функция $P(m,k)$ определяет максимальное число вершин, которые могут быть достигнуты из любой вершины графа самое большее за m шагов. Приведем выражения экстремальной функции $P(m,k)$ для $1 \leqslant k \leqslant 4$: $P(m,1) = 2m+1$; $P(m,2) = 2m^2+2m+1$; $P(m,3) = \frac{4}{3}m^3 + 2m^2 + \frac{8}{3}m + 1$; $P(m,4) = \frac{2}{3}m^4 + \frac{4}{3}m^3 + \frac{10}{3}m^2 + \frac{8}{3}m + 1$.

Далее функцию $P(d,2) = 2d^2+2d+1$ будем обозначать n_d.

Отметим, что $P(m,k)$, $k \geqslant 2$, определяет «объем» k-мерного октаэдра, а $S(m,k)$ — «площадь» его поверхности [112].

Ч. К. Вонг и Д. Копперсмит [111], используя функцию $P(m,k)$, установили нижние границы диаметра и среднего расстояния циркулянтов порядка n и размерности k:

$$\mathrm{d}(n;S) \geqslant \mathrm{d}_{\min}(n) \geqslant \frac{1}{2}(k!n)^{\frac{1}{k}} - \frac{1}{2}(k+1) \approx \frac{1}{2}(k!)^{\frac{1}{k}} n^{\frac{1}{k}},$$

$$\overline{\mathrm{d}}(n;S) \geqslant \overline{\mathrm{d}}_{\min}(n) \geqslant \frac{1}{2}\,\frac{k}{(k+1)!n}\left((k!n)^{\frac{1}{k}} - (3k+1)\right)^{k+1} \approx \frac{1}{2}\,\frac{k}{k+1}(k!)^{\frac{1}{k}} n^{\frac{1}{k}},$$

где $\overline{\mathrm{d}}_{\min}(n) = \min_S\{\overline{\mathrm{d}}(n;S)\}$.

Я. Зеровник и Т. Пизанский [115] описали алгоритм сложности $\mathrm{O}(\log n)$ вычисления диаметра графов вида $C(n;s_1,s_2)$. Используя геометрический подход, они свели проблему вычисления диаметра циркулянтов размерности k к эквивалентной проблеме в целочисленной решетке $\mathbb{Z}^k$.

Для $k=2$ из [111] следует, что нижняя граница диаметра равна $\left(\sqrt{2n}-3\right)/2$. Точная нижняя граница диаметра двумерных циркулянтов получена в [15]:

$$D(n) = \lceil(\sqrt{2n-1}-1)/2\rceil.$$

Величина $D(n)$ также найдена в [35, 38, 39, 56].

В [35] показано, что среднее расстояние $\overline{\mathrm{d}}(n)$ в случае $k=2$ асимптотически равно $\sqrt{2n}/3$. В работе [39] дана формула для нижней границы среднего расстояния в циркулянтах размерности $k=2$:

$$\overline{\mathrm{d}}(n) = (n-1)\sqrt{2n-1}/3n.$$

Следуя [67], определим экстремальную функцию $M(d,k)$.

Определение 4. Пусть d — положительное целое, $S = \{1, s_2, \ldots, s_k\}$ — множество положительных целых, $m(d,S) = \max\{m : \mathrm{d}(m;S) \leqslant d\}$. Для любых заданных целых d и k положим $M(d,k) = \max\{m(d,S) : \exists S\ (|S| = k)\}$.

Имеем $M(d,k) = P(d,k)$ для $k \leqslant 2$; $M(d,k) \leqslant P(d,k)$ для $k > 2$. В 1994 г. Ф. П. Муга [84] получил следующий результат.

Теорема 2. Значение $M(d,k)$ является нечетным числом при любых $d \geqslant 1$ и $k \geqslant 1$.

Будем использовать обозначение из [41]: пусть n и k — положительные целые; обозначим через $d(n,k)$ минимально возможное натуральное d, такое, что существует множество образующих $S = \{1, s_2, \ldots, s_k\}$, для которого $\mathrm{d}(n;S) \leqslant d$.

В литературе используются различные понятия оптимальности для циркулянтов. Например, в [33, 49] граф $C(n;S)$ называется оптимальным, если $\mathrm{d}(n;S) = \mathrm{d}_{\min}(n)$, и предельно оптимальным, если $\mathrm{d}(n;S) = D(n)$. В настоящей работе будем использовать следующие определения.

Определение 5. Циркулянтный граф $C(n;S)$, величины n и S называются оптимальными, если $\mathrm{d}(n;S)=D(n)$, и субоптимальными, если $\mathrm{d}(n;S)=D(n)+1$.

Определение 6. Множество натуральных чисел Θ называется оптимальным (субоптимальным) семейством, если каждое $n\in\Theta$ оптимально (субоптимально).

Определение 7. Циркулянтный граф $C(n;S)$ называется предельно оптимальным, если число вершин $C(n;S)$ на расстоянии m от вершины 0, $m=0,1,\ldots,D(n)-1$, равно $S(m,k)$, а на расстоянии $D(n)-(n-P(D(n)-1,k))$.

Таким образом, предельно оптимальный граф является самым плотным возможным графом для заданных n и k. Каждый предельно оптимальный граф является оптимальным, но не каждый оптимальный — предельным. Предельно оптимальные графы достигают точных нижних границ диаметра и среднего расстояния и соответственно минимумов максимальной и средней структурных задержек, максимумов связности и надежности [9, 38], минимального числа шагов при реализации коммуникационных алгоритмов [8, 21, 80], но существуют не для всех величин n и k [14]. Для важного случая $k=2$ они существуют для любого числа вершин (см. теорему 3). Следующие проблемы комбинаторной оптимизации для циркулянтных сетей рассматривались многими авторами.

Задача 1. Найти оптимальные сети с минимальным диаметром (возможно, равным $D(n)$) для любого порядка n.

Задача 2. Найти бесконечные семейства циркулянтных графов с максимальным числом вершин (возможно, равным $M(d,k)$) для любого диаметра d.

Такие оптимальные графы, взятые в качестве сетей связи, имеют высокие отказоустойчивость и скорость коммуникаций, минимальную задержку и максимальные связность и надежность [1, 8, 9, 10, 21, 33, 38, 101, 102]. Вторая из проблем относится к проблеме (Δ,d)-графов (в классе циркулянтов), состоящей в максимизации порядка неориентированного регулярного графа степени Δ и диаметра d (Б. Элспас [50]). Следует упомянуть, что одним из первых авторов, кто рассмотрел проблему сокращения диаметра для семейств циркулянтных графов, был Р. С. Вилков [110].

Выше рассматривались только циркулянты с четной степенью. Для полноты описания класса циркулянтных графов представляем результат, относящийся к циркулянтам с нечетной степенью. Используя геометрическую модель циркулянтов, Ф. П. Муга [85] получил верхнюю границу $N(d,2k+1)$ максимального порядка циркулянтного графа со степенью $2k+1$ и диаметром d:

$$N(d,2k+1)\leqslant\sum_{i=0}^{k+1}(C_i^kC_i^d2^i+C_{i-1}^kC_{i-1}^{d-1}2^{i-1}).$$

Циркулянты с нечетной степенью найдут применение в классе рекурсивных циркулянтов [95].

2. Оптимальные двумерные циркулянты

Случаи, когда $k=2$ или $k=3$, широко изучаются благодаря их практическим приложениям.

Для $k=2$ в 1981 г. доказано [15], что для каждого числа вершин n неориентированные циркулянтные графы могут иметь одновременно и минимальный диаметр $D(n)$, и минимальное среднее расстояние.

Теорема 3 [15]. Пусть $n>4$ и $D\geqslant1$ — целые числа, такие, что $2D^2-1\leqslant n\leqslant$ $\leqslant n_D+2D+2$. Тогда циркулянт $C(n;D,D+1)$ предельно оптимальный.

Отсюда следует интересное свойство: для каждого $D \geqslant 2$ циркулянты с порядками $n \in \{2D^2-1, 2D^2, 2D^2+1\}$ имеют два предельно оптимальных описания — $(n; D-1, D)$ и $(n; D, D+1)$ (*свойство перекрытия описаний*). Из теоремы 3 следует

Теорема 4 [15]. Для любого целого $n > 4$ предельно оптимальный двумерный циркулянт порядка n есть

$$C(n; d, d+1), \text{ где } d = [(\sqrt{2n-1}-1)/2], \tag{1}$$

$[x]$ — ближайшее целое к x.

В 1991 г. Р. Байвиде с соавт. [31] получили то же самое семейство циркулянтов (1), но записанное в другом виде:

$$C(n; b-1, b), \text{ где } b = \lceil \sqrt{n/2} \rceil, \ n > 2. \tag{2}$$

Дж.-К. Бермонд и соавт. [35] получили интервалы изменения n, сохраняющие свойство перекрытия описаний, на которых циркулянты $C(n; D, D+1)$ или $C(n; D-1, D)$ достигают минимума среднего расстояния (заметим, что эти области значений n следуют из теоремы 3). Авторы [35] доказали также, что диаметр графа $C(n; D, D+1)$ после удаления одной вершины или одного ребра есть самое большее $D+1$.

В 1985 г. Ф. Бош и Дж. Ванг доказали следующий результат [38]:

Теорема 5. Нижняя граница диаметра $D(n)$, $n > 6$, достигается в циркулянтном графе $C(n; s_1, s_2)$ с образующими $s_1 = D(n)$, $s_2 = D(n)+1$.

Они также нашли, что эти графы являются оптимальными по отношению ко всем стандартным критериям, относящимся к сетевой надежности, в частности граф $C(n; D(n), D(n)+1)$ имеет максимальную связность четыре.

В табл. 1 рассмотрены примеры, поясняющие разницу между графами из [15] и [38]. Комбинируя результаты работ [15, 38], представляем в последней колонке расширенные области оптимальности рассмотренных описаний.

Таблица 1

Области оптимальности описаний

Семейство графов	$\min \mathrm{d}$ & $\min \bar{\mathrm{d}}$ [15]	$\min \mathrm{d}$ [38]	$\min \mathrm{d}$
$C(n; 2, 3)$	$n \in [7, 19]$	$n \in [7, 13]$	$n \in [7, 19]$
$C(n; 3, 4)$	$n \in [17, 33]$	$n \in [14, 25]$	$n \in [14, 33]$
$C(n; 4, 5)$	$n \in [31, 51]$	$n \in [26, 41]$	$n \in [26, 51]$
$C(n; 5, 6)$	$n \in [49, 73]$	$n \in [42, 61]$	$n \in [42, 73]$

Задача исследования найденных оптимальных двумерных циркулянтов как сетей связи компьютерных систем интенсивно изучалась последние 20 лет. Ниже величина $D(n)$ для краткости обозначена через D.

В 1997 г. К. Хубер [63] рассмотрел задачу оптимального проектирования СБИС для оптимальных циркулянтов вида (2) любого порядка n. В 1998 г. А. Л. Листман и др. [72] изучили сетевые свойства двух- и трехмерных циркулянтов, в частности оптимальных графов $C(n_D; D, D+1)$, и исследовали возможность вложимости в них решеток.

В серии работ 1999–2001 гг. [97, 98, 113] и др. авторы рассмотрели оптимальные сети (2) (соответственно (1)) в качестве технической реализации сетей связи вычислительных систем высокой производительности. Они назвали эти сети *midimew*-сетями.

В. Пуэнте с соавт. [98] показали для них увеличение сетевой производительности при реальных нагрузках, а также уменьшение длины среднего пути сообщения по сравнению с торами. В [97, 98] для этой топологии представлено практическое решение проблемы предотвращения дедлоков (блокировок пути при передаче пакетов). Ю. Янг и соавт. [113] использовали несколько примеров таких графов как базис при проектировании сетей связи массово параллельных систем.

В 2008 г. К. Мартинес с соавт. [11, 78] применили циркулянтные сети размерностей 2 и 3, в частности семейство вида $C(n_D; D, D+1)$, в теории кодирования при построении совершенных групповых кодов.

В 2009 г. Б. Б. Нестеренко и М. А. Новотарский [23] применили квадратную структуру оптимальных циркулянтов вида

$$C(n; \sqrt{n}/2 - 1, \sqrt{n}), \text{ где } n = 2^{2i}, \ i \geqslant 3,$$

полученных в [31], в качестве базовой структуры дискретных клеточных нейронных сетей. Такие сети ориентированы на моделирование сложных физических процессов (алгоритмы обработки изображений, распознавания образов, оценки динамики механических систем и др.) путем численного решения уравнений математической физики.

Важной характеристикой в проектировании параллельных систем является *расширяемость* (или наращиваемость), т. е. возможность увеличения системной мощности добавлением большего количества вершин в сети без изменения основных связей, свойств и характеристик топологии [9, 16, 68]. Из теоремы 3 следует, что параметры описаний оптимальных графов сохраняются при изменении числа вершин в больших диапазонах. В [16] представлен алгоритм статической реконфигурации циркулянтной сети в вычислительной системе, когда новые модули добавляются в систему. Стоимость реконфигурации с ростом числа вершин n приближается к нулю как $1/\sqrt{n}$.

3. Эквивалентность циркулянтов

Изучение изоморфизма графов является необходимой задачей для решения проблемы синтеза и выбора структур вычислительных систем. Проблемой изоморфизма циркулянтных графов занимались Б. Элспас и Дж. Тернер [51, 108], В. А. Воробьев [3], Ф. Гобел и Е. Нейтел [56], К. Делорме и М. Махео [48], С. А. Евдокимов и И. Н. Пономаренко [6], Б. Манс, Ф. Паппаларди и И. Шпарлинский [73, 74, 75], М. Музычек [88], Х. Фенг и М. Ху [53] и многие другие. Обзор по изоморфизму конечных графов Кэли, где в том числе представлены циркулянтные графы, дан в [70]. Здесь коротко рассмотрим свойства эквивалентности (изоморфизма) циркулянтных графов.

Пусть задано некоторое описание циркулянтного графа C (оптимального или нет) $(n; S) = (n; s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_k)$. Необходимо получить другие его описания. Умножим все $s_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots, k$, на элемент t приведенной системы вычетов по модулю n. В качестве новых образующих s'_i возьмем остатки от деления ts_i на n, если они не больше $\lfloor n/2 \rfloor$, или дополнения этих остатков до n в противном случае. Назовем данное преобразование, переводящее все s_i в s'_i, эквивалентным преобразованием [51], а отношение между множествами S и S', а также графами $C(n; S)$ и $C(n; S')$ отношением эквивалентности. Действительно, оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Все графы $C(n; S')$, получаемые из $C(n; S)$, когда t пробегает приведенную систему вычетов по модулю n, образуют класс эквивалентности.

Очевидно, эквивалентность графов влечет их изоморфизм [26, 51]. Например, графы $C(23; 1, 9)$ и $C(23; 1, 5)$ изоморфны, поскольку эквивалентны ($t = 5$). А. А́да́м [26] предположил, что обратное также имеет место: любые два изоморфных циркулянтных графа эквивалентны. Оказалось, что в общем случае это неверно. Например, циркулянты $C(16;1,2,7)$ и $C(16;2,3,5)$ изоморфны, но не эквивалентны [51]. Тем не менее в [48, 53] доказано важное свойство: для двумерных циркулянтов общего вида понятия эквивалентности и изоморфизма совпадают при любом порядке графа. Отметим, что в [56] это свойство доказано для двумерных циркулянтов с единичной образующей. Понятия эквивалентности и изоморфизма совпадают для циркулянтов с простым порядком или порядком, равным произведению двух различных простых чисел [37, 108], а также в случаях некоторых других n [37, 74, 88]. В 2003 г. С. А. Евдокимов и И. Н. Пономаренко [6] построили алгоритм полиномиальной сложности для распознавания и проверки изоморфизма произвольных циркулянтных графов.

Чтобы получить все эквивалентные описания циркулянта порядка n, достаточно взять в качестве множителя t те элементы приведенной системы вычетов по модулю n, которые не превосходят $\lfloor n/2 \rfloor$ [14].

Пример 1. Оптимальный двумерный граф с $n = 36$ в силу теоремы 4 имеет образующие $s_1 = 4$ и $s_2 = 5$. Приведенная система вычетов по модулю 36 есть $\{1,5,7,11,13,17\}$. Перевод образующих 4 и 5 в s_1', s_2' дает новый эквивалентный (изоморфный) оптимальный граф $C(36;1,8)$ с единичной образующей.

К сожалению, данный метод не всегда может использоваться для нахождения оптимальных двумерных графов с единичной образующей, так как для некоторых значений n они не существуют.

4. Двумерные циркулянты с единичной образующей

Двумерные циркулянтные графы с единичной образующей $s_1 = 1$ (или кольцевые циркулянты) являются популярной моделью коммуникаций в локальных сетях и архитектурах параллельной обработки. Большое число работ посвящено изучению проблем, связанных с этими сетями: существованию оптимальных графов, изучению диаметра и других структурных характеристик, конструированию алгоритмов обменов для них и др.

В [49] авторы поставили следующую задачу.

Задача 3. Классифицировать все значения n, для которых предельно оптимальные (оптимальные) двумерные кольцевые циркулянты порядка n могут быть найдены.

Во многих работах, изучающих эту проблему, используется следующая геометрическая модель циркулянтов [111] (см. также [14, 109, 114]). Циркулянтный граф $C(n;s_1,s_2)$ конструируется на плоскости Евклида $\mathbb{Z}^2$ как ромбоподобная конфигурация, если каждую точку решетки (i,j) пометить числом $m \equiv s_1 i + s_2 j \pmod n$, где $0 \leqslant m < n$ — номер вершины графа. В результате все отметки $0 \leqslant m < n$ повторятся на плоскости бесконечно много раз, образуя укладку (tessellation) $\mathbb{Z}^2$. Пример укладки плоскости посредством геометрической модели графа $C(25;1,7)$ изображен на рис. 2. Расширение геометрической модели циркулянтных графов для $k \geqslant 3$ очевидно.

Обозначим $R(d) = \{n_{d-1}+1,\ldots,n_d\}$, $d > 0$. Таким образом, натуральный ряд чисел делится на интервалы $R(d)$, $d > 0$, и $|R(d)| = 4d$. Например, $R(1) = \{2,\ldots,5\}$, $R(2) = \{6,\ldots,13\}$, $R(3) = \{14,\ldots,25\}$. В областях $R(d)$ линии значений $n = q_1[d] = 2d^2 - d$, $n = q_2[d] = 2d^2$, $n = q_3[d] = 2d^2 + d$ и $n = n_d$, $d \geqslant 1$, играют важную роль в конструировании оптимальных семейств. Эти значения n изучались в ряде работ, где доказано существование предельно оптимальных графов $C(n;1,s)$ для них. Точки

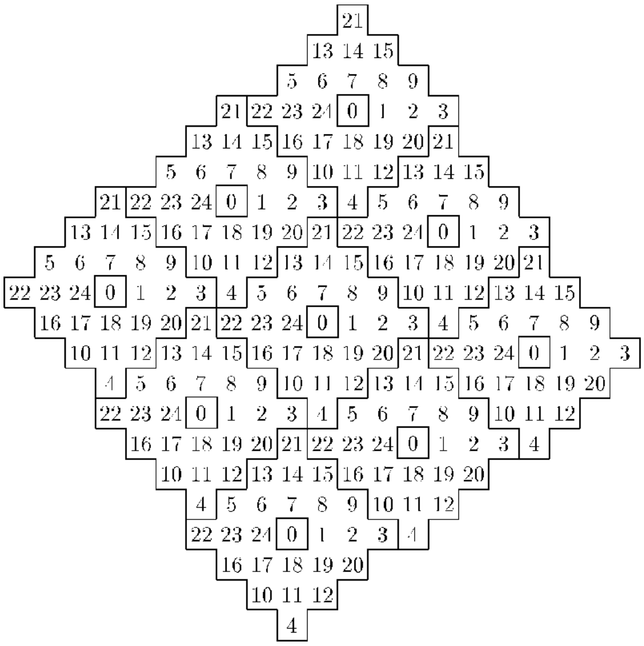


Рис. 2. Пример укладки плоскости

$n = q_1[d]$, $q_2[d]$, $q_3[d]$ также имеют много неэквивалентных оптимальных описаний вида $(n; 1, s)$.

В работах [14, 35, 36, 43, 44, 49, 61, 62, 79, 109] рассмотрены различные подходы к решению задачи 3 и получены бесконечные семейства графов с аналитическим описанием.

Д. Ду и соавт. [49] дали следующую верхнюю границу диаметра графа $C(n; 1, s)$:

$$\mathrm{d}(n; 1, s) \leqslant \max\{\lfloor n/s \rfloor + 1,\ n - \lfloor n/s \rfloor s - 2,\ (\lfloor n/s \rfloor + 1)s - n - 1\}$$

и нашли 16 бесконечных семейств оптимальных графов $C(n; 1, s)$, для которых точная нижняя граница диаметра достигается. Они использовали следующую лемму для получения параметров оптимальных (и субоптимальных) графов.

Лемма 5 [49]. Пусть $n = 2d^2 + qd + h$, где $2 \leqslant q \leqslant 6$ и $0 \leqslant h < d$. Тогда $\mathrm{d}(n; 1, 2d + (q-1)) \leqslant \max\{d+1, d+h-2, d+q-h-2\}$.

В работе [49] (см. также [109] и теорему 8 из [79]) доказана следующая

Теорема 6. Пусть $n = n_d - 1$, $d \geqslant 1$. Тогда $\mathrm{d}_{\min}(n) = d + 1$.

Ф. Гобел и Е. Нейтел [56] получили некоторые результаты по исследованию хроматического числа и линейной транзитивности двумерных кольцевых сетей. Они нашли следующие зависимости для диаметра графов $C(n; 1, s)$ с заданной образующей s:

Теорема 7. Если $\mathrm{d}(n; 1, s) \geqslant n/s$, то $\mathrm{d}(n + 2s; 1, s) = \mathrm{d}(n; 1, s) + 1$.

Теорема 8. Для любого $M > 0$ существуют n и s, такие, что $\mathrm{d}(n + 2s; 1, s) > \mathrm{d}(n; 1, s) + M$.

Д. Цвиели [109] описала бесконечные семейства графов $C(n; 1, s)$ с заданной образующей s и их диаметры.

Лемма 6. Пусть $l \geqslant 1$, $m \geqslant -l + 1$. Тогда $\mathrm{d}(n; 1, s) = l + \lceil m/2 \rceil$, где $s = 2l + 1$, $n = n_l + ms$ или $s = 2l$, $n = 2l^2 + l + ms$.

Часть графов из описанных семейств являются оптимальными. Используя лемму 6, а также геометрические трансформации циркулянтов на плоскости, Д. Цвиели нашла четыре бесконечных семейства оптимальных величин n. Они включают все семейства из [49], но, в отличие от [49], содержат $O(\sqrt{d})$ величин n в каждом $R(d)$. В частности, для точек $n = q_i[d]$, $i = 1, 2, 3$, получена

Теорема 9. Пусть $n = q_i[d]$, $i = 1, 2, 3$. Образующие оптимальных графов $C(n; 1, s)$ вычисляются по формулам $s = s_l^{\pm} = l(2d - 2 + i) \pm 1$, $1 \leqslant l < d/2$ и $(l, d) = 1$.

Д. Ф. Хсу и Дж. Шапиро [61] другим методом получили бесконечные семейства оптимальных величин n, аналогичные семействам из [109], и дали следующую верхнюю границу диаметра графа $C(n; 1, s)$:

Теорема 10. Для $n > 0$ справедливо неравенство $\mathrm{d}_{\min}(n) < (n/2)^{\frac{1}{2}} + (n/8)^{\frac{1}{4}} + 2$.

В дополнение к этим классам величин n Дж.-К. Бермонд и Д. Цвиели [36], Э. А. Монахова [79], К. Мукхопадхая и Б. Синха [87] идентифицировали новые плотные бесконечные семейства оптимальных графов. Эти семейства покрывают все величины в $R(d)$ (без одной или двух), когда d или $d+1$ простое число [36, 79], и покрывают 92 % всех величин n вплоть до $n = 8 \cdot 10^6$ [36]. Термин «плотный» используется здесь в том смысле, что семейства покрывают большие непрерывные интервалы в каждом $R(d)$, $d > 1$. Доказана

Теорема 11 [36]. Пусть $n \in R(d)$. Тогда n оптимально в следующих случаях:
a) $(n, d) = 1$,
b) $(n, d + 1) = 1$,
c) $(n, d - 1) = 1$ и $n \leqslant 2d^2 + 1$.

Следствие 1. Если d или $d + 1$ простое число, то каждое n, такое, что $n \in R(d)$, $n \neq n_d - 1$, оптимально с возможным исключением $n = 2d^2 - 2$ в случае простого $d + 1$.

В [79] аналогичное свойство получено для предельно оптимальных графов.

Авторы [87], используя исчерпывающий поиск и аналог теоремы 11, показали, что предельно оптимальные описания могут быть получены более чем для 80 % величин n, $n \leqslant 16000$, которые, следовательно, имеют гамильтонов цикл, связывающий все вершины графа.

Первый результат по аналитическому решению проблемы построения экстремальных двумерных кольцевых циркулянтов с заданным диаметром получен автором в [14]:

Теорема 12. Пусть $D \geqslant 1$ — целое число. Тогда $C(n_D; 1, 2D + 1)$ — предельно оптимальный циркулянт.

Этот результат был также получен Дж.-К. Бермондом с соавт. в [35] и Дж. Ибра с соавт. в [114], где показано, что $\mathrm{d}(n_D; s_1, s_2) = D$, если и только если $s_1 \equiv Dp$ и $s_2 \equiv (D + 1)p$, где p — любое меньшее n и взаимно простое с n число. В последующие годы экстремальные графы из теоремы 12 были названы оптимальным семейством и активно исследовались [32, 39, 52, 77, 90, 91].

В 1990 г. Р. Браун и Р. Хогсон [39] получили оптимальное семейство $C(n_D; 1, 2D+1)$, $D \geqslant 1$, нашли нижние границы диаметра и среднего расстояния и рассмотрели применение этой топологии в транспьютерной системе для обработки образов. В 2001 г. Л. Нараянан и др. [91], применяя семейство сетей $C(n_D; 1, 2D + 1)$, исследовали решение проблемы организации коммуникаций в оптических сетях, используя спектральное уплотнение каналов (или WDM-подход). Сеть в этом случае состоит из вершин, связанных волоконно-оптическими линиями связи, каждая из которых может поддерживать фиксированное число длин волн. В 2003 г. Р. Байвиде и др. [32, 77] исследовали семейство сетей $C(n_D; 1, 2D + 1)$ в качестве модели сети связи мультимодульных компьютерных систем. В работе [32] рассмотрены вложимость этих графов на поверхность тора и возможность их будущего применения в системах с цилиндрическими структурами и атмосферными оптическими коммуникациями [69]; отмечено, что эти графы являются «идеальными» для применения диффузионных моделей коммуникаций, таких, как трансляционные и полные обмены. Авторы [32] рассмотрели также в качестве модели сетей связи семейство графов $C(2D^2; 1, 2D-1)$, $D > 1$.

Недавно был сделан новый шаг в области изучения оптимальности графов $C(n; 1, s)$ [43, 44].

Пусть $n = qs + r$, $0 \leqslant r < s$, и $s = ar + b$, $0 \leqslant b < r$. Б. Чен и соавт. [44] получили формулы диаметра графов $C(n; 1, s)$ для подкласса значений n, а именно для $q > r$; для $q \leqslant r$ при $b \leqslant aq + 1$.

В 2006 г. Б. Чен и др. [43], используя эти формулы, нашли необходимые и достаточные условия того, что двумерный кольцевой циркулянтный граф порядка n, где $2d^2 + d < n < n_d - 1$, $d > 1$, имеет оптимальное описание.

Теорема 13. Предположим, что $n = 2t^2 + 2t - B$, где $t > B > 0$. Тогда существует положительное целое s, такое, что $\mathrm{d}(n; 1, s) = t = D(n)$, если и только если существуют неотрицательные целые числа a, b, u и v, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $n = av + bu$;
2) $a + b \leqslant 2t + 1$ и $u + v \leqslant 2t + 1$;
3) $b \geqslant a$, $u \geqslant v$, $u > a$, $v < b$;
4) справедливо одно из следующих двух условий:
    а) $x = 0$, $b - a = y$ — нечетное число, $y | 2B + 1$ и $1 \leqslant y \leqslant \sqrt{2B+1}$,
    б) $y = 0$, $u - v = x$ — нечетное число, $x | 2B + 1$ и $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2B+1}$, где $x = 2t + 1 - (a + b)$, $y = 2t + 1 - (u + v)$;
5) $(b, v) = 1$.

Применяя эти условия, авторы получили ряд новых оптимальных и субоптимальных бесконечных семейств двумерных кольцевых циркулянтных графов. Но проблема классификации всех значений n, для которых такие графы существуют, остается открытой. Перечислим некоторые из задач, которые еще не решены.

Задача 4. Получение формулы для диаметра двумерной кольцевой сети в случае $q \leqslant r$, когда $b > aq + 1$ [43].

Задача 5. Улучшение оценок, найденных для $d(n, k)$.

Задача 6. Получение вида функции $d(n, k)$, когда значение k фиксировано.

Известно, что когда значение k фиксировано, $d(n, k)$ не есть монотонно увеличивающаяся функция от n. Например, для $k = 3$ имеем $d(103, 3) = 5$, но $d(117, 3) = 4$. В работе [41] показано компьютерным поиском, что $d(n, 3) \leqslant d(n', 3) + 1$ для всех $n < n' \leqslant 1000$. В [109] проверено, что $d(n, 2) \leqslant d(n', 2) + 1$ для всех $n < n' \leqslant 8 \cdot 10^6$.

5. Трехмерные циркулянты

В случае размерности $k = 3$ из [111] следует

$$(8/27)d^3 + \mathrm{O}(d^2) \leqslant M(d, 3) \leqslant 1 + (4d^3 + 6d^2 + 8d)/3.$$

Дж. Ибра и др. [114] доказали для $k = 3$, что максимальный порядок циркулянта $C(n; s_1, s_2, s_1 + s_2)$ диаметра d, где $1 \leqslant s_1 < s_2 < \lfloor n/2 \rfloor$, равен $3d^2 + 3d + 1$. Данная граница достигается для семейства графов с $s_1 = 1$ и $s_2 = 3d + 1$. Это семейство изучали К. Шин [104] и Ф. Агуило с соавт. [27]. В 2008 г. К. Мартинес и др. [11] применили семейство из [114] к конструированию совершенных кодов, корректирующих ошибки.

Отметим, что результаты, полученные К. Гарсиа и П. Соле в [54], показывают, что для увеличения порядка графа n необходимо использовать образующие, линейно независимые над $\mathbb{Z}_n$.

К. Пейра (см. заметку в [33]) нашла семейство трехмерных кольцевых циркулянтов диаметра d с порядком $n = (8/9)d^3 + O(d^2)$. Ш. Чен и Х.-Д. Джиа [41] и К. Делорме (см. [33]) нашли семейство трехмерных кольцевых циркулянтов порядка n с диаметром, не превосходящим $d \geqslant 3$, и $M(d,3) \geqslant n = 32\lfloor d/3\rfloor^3 + 8\lfloor d/3\rfloor^2 + 2\lfloor d/3\rfloor$.

В 2003 г. получен следующий результат [81]:

Теорема 14. Максимальный порядок трехмерного кольцевого циркулянта $C(n;1, s_2, s_3)$ диаметра $d \geqslant 1$ есть

$$M(d,3) = \begin{cases} \dfrac{32}{27}d^3 + \dfrac{16}{9}d^2 + 2d + 1, & \text{если} \quad d \equiv 0 \pmod 3, \\ 32\lfloor d/3\rfloor^3 + 48\lfloor d/3\rfloor^2 + 30\lfloor d/3\rfloor + 7, & \text{если} \quad d \equiv 1 \pmod 3, \\ 32\lfloor d/3\rfloor^3 + 80\lfloor d/3\rfloor^2 + 70\lfloor d/3\rfloor + 21, & \text{если} \quad d \equiv 2 \pmod 3, \end{cases}$$

и достигается при следующих образующих:

$$(s_2, s_3) = \begin{cases} (\dfrac{8}{9}d^2 + \dfrac{2}{3}d,\ \dfrac{8}{9}d^2 + 2d + 2), & \text{если } d \equiv 0 \pmod 3, \\ (8\lfloor d/3\rfloor^2 + 6\lfloor d/3\rfloor + 2,\ 8\lfloor d/3\rfloor^2 + 10\lfloor d/3\rfloor + 4), & \text{если } d \equiv 1 \pmod 3, \\ (8\lfloor d/3\rfloor^2 + 10\lfloor d/3\rfloor + 4,\ 8\lfloor d/3\rfloor^2 + 14\lfloor d/3\rfloor + 6), & \text{если } d \equiv 2 \pmod 3). \end{cases}$$

Для описания построенных графов найдено три различных множества образующих (по крайней мере, для $d \equiv 0 \pmod 3$ и $d \equiv 2 \pmod 3$) [18, 81]. В табл. 2 представлены описания трехмерных кольцевых циркулянтных графов с максимальным порядком, равным $M(d,3)$, для диаметров $1 \leqslant d \leqslant 18$.

Таблица 2

Трехмерные кольцевые циркулянты с максимальным порядком

d	$M(d,3)$	s_2, s_3	s_2, s_3	s_2, s_3	d	$M(d,3)$	s_2, s_3	s_2, s_3	s_2, s_3
1	7	2, 4			10	1393	92, 106		
2	21	4, 6	3, 8	5, 9	11	1815	106, 120	15, 241	839, 855
3	55	10, 16	5, 21	20, 24	12	2329	136, 154	17, 273	1088, 110
4	117	16, 22			13	2943	154, 172		
5	203	22, 28	7, 57	83, 91	14	3629	172, 190	19, 381	1709, 1729
6	333	36, 46	9, 73	144, 152	15	4431	210, 232	21, 421	2100, 2120
7	515	46, 56			16	5357	232, 254		
8	737	56, 66	11, 133	329, 341	17	6371	254, 276	23, 553	3035, 3059
9	1027	78, 92	13, 157	468, 480	18	7525	300, 326	25, 601	3600, 3624

С помощью компьютерного поиска для $k = 3$ проверено, что при $n > M(d,3)$, $2 \leqslant d \leqslant 6$, циркулянты диаметра d не существуют. Таким образом, можно высказать следующую **гипотезу**: максимально достижимый порядок трехмерного циркулянта $C(n; s_1, s_2, s_3)$ диаметра $d \geqslant 1$, где $1 \leqslant s_1 < s_2 < s_3 < n$, равен $M(d,3)$.

6. Мультипликативные циркулянтные графы

Во многих работах исследуется диаметр многомерных циркулянтов, а также максимально достижимый их порядок как функция от d и k. Первый результат по изучению многомерных циркулянтов был получен в 1974 г.

Теорема 15 [111]. Для нечетного $s > 1$ диаметр циркулянта $C(s^k; 1, s, s^2, \dots, s^{k-1})$ равен $\dfrac{k}{2}n^{1/k} - \dfrac{k}{2} = k\lfloor s/2\rfloor$; среднее расстояние равно $k(s^2-1)/4s$.

Ш. Чен и Х.-Д. Джиа в 1993 г. доказали следующий важный результат:

Теорема 16 [41]. Пусть d и k — любые положительные целые, такие, что $d \geqslant k \geqslant 3$, и пусть $q = \lfloor (d-k+3)/k\rfloor$. Тогда

$$M(d,k) \geqslant M = 2q\sum_{i=0}^{k-1}(4q)^i = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{k}\right)^k d^k + \mathrm{O}(d^{k-1}).$$

При доказательстве теоремы 16 авторы определили, что верхняя граница диаметра циркулянтов вида $C(M; 1, 4q, ..., (4q)^{k-1})$ равна $k(q+1)-3$.

Будем называть, следуя [105], *мультипликативными* циркулянтные сети вида $C(n; 1, s, s^2, \dots, s^{k-1})$ с образующими в виде степеней некоторого числа $s \geqslant 2$. В этом определении мультипликативных циркулянтов величина n может быть произвольной, не обязательно равной s^k. Заметим, что семейство из [111] — мультипликативные циркулянты с нечетным s, а из [41] — с четным s, кратным 4.

И. Стойменович (1997 г.) [105] изучил топологические свойства мультипликативных циркулянтов с четным s и порядком $n = s^k$ и получил их диаметр и среднее расстояние.

Теорема 17 [105]. Диаметр циркулянтной сети $C(s^k; 1, s, s^2, \dots, s^{k-1})$, где $s > 2$ — четное число, равен $ks/2 - \lfloor k/2\rfloor$.

Б. Пархами в 2006 г. [93, 94] описал структурные свойства мультипликативных циркулянтных сетей с нечетным $s \geqslant 3$ и порядками $2s^{k-1} < n \leqslant s^k$ и определил формулу для их диаметра.

Теорема 18 [93, теорема 6]. Диаметр циркулянтной сети $C(n; 1, s, s^2, \dots, s^{k-1})$, где $s > 1$ — нечетное число и $n > 2s^{k-1}$, равен

$$(k-1)\lfloor s/2\rfloor + \lceil (n - s^{k-1})/(2s^{k-1})\rceil. \tag{3}$$

И. Стойменович и Б. Пархами также показали, что мультипликативные циркулянтные сети имеют простые оптимальные алгоритмы парного [93, 94, 105] и трансляционного обменов [105].

Другие структурные характеристики, относящиеся к диаметру, получены в [71] для ориентированных мультипликативных циркулянтов вида $G(s^k; 1, s, \dots, s^{k-1})$. К. Гарсиа и П. Соле [54] дали более точные оценки диаметра, чем в [111], для графов вида $C(n; 1, s, \dots, s^{k-1})$, когда n — простое число. Ф. Хванг [65] рассмотрел проблему сокращения диаметра по сравнению с [111] для ориентированных мультипликативных циркулянтов любого порядка n.

Диаметры графов семейств мультипликативных циркулянтов размерностей $k \geqslant 4$ исследованы автором в работах [19, 20]. Построены бесконечные семейства циркулянтов, достигающих найденных границ диаметра.

Теорема 19 [19]. Пусть $k > 2$ — целое, $s > 2$ — нечетное число и $S = \{1, s, s^2, \dots, s^{k-1}\}$. Если $n = \lceil s/2\rceil \sum\limits_{i=0}^{k-1} s^i$, то $\mathrm{d}(n; S) = \left\lfloor \dfrac{k}{2}\lceil s/2\rceil \right\rfloor$.

Теорема 20 [19]. Пусть $k > 2$ — целое, $s > 2$ — нечетное число и $S = \{1, s, s^2, \ldots, s^{k-1}\}$. Если $n = \lceil s/2 \rceil \sum\limits_{i=0}^{k-2} s^i + \lfloor s/2 \rfloor s^{k-1}$, то

$$\mathrm{d}(n; S) = \begin{cases} \dfrac{k}{2}\lceil s/2 \rceil - 1 & \text{для четного } k \text{ или } s \equiv 3 \pmod 4, \\ \left\lfloor \dfrac{k}{2}\lceil s/2 \rceil \right\rfloor & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Применяя теорему 20 для $k = 4$, получим семейство циркулянтов, которые улучшают известные оценки экстремальной функции $M(d, 4)$.

Теорема 21. Пусть $d > 4$ — целое и $q = 2\lfloor (d-1)/2 \rfloor + 1$. Тогда

$$M(d, 4) \geqslant n = \frac{q^4 + 1}{2} + q^2 + q.$$

Сравнение формулы (3) с диаметрами графов семейств из теорем 19 и 20 показывает, что (3) справедлива при $s = 3$ и $k \geqslant 3$ для семейства из теоремы 19. Тем не менее формула (3) не имеет места для найденных семейств графов при $k \geqslant 4$ и нечетном $s > 3$ и, следовательно, дает только верхнюю границу диаметра.

В работе [20] улучшена оценка диаметра графов семейства из [41]. Вместе с результатом теоремы 19 это дает новые нижние границы экстремальной функции $M(d, k)$ для всех $k > 4$.

Теорема 22 [20]. Пусть $p = \lfloor (d - \lfloor k/4 \rfloor)/k \rfloor$, где d и $k > 4$ — целые числа, такие, что $d \geqslant k + \lfloor k/4 \rfloor$. Тогда

$$M(d, k) \geqslant n = \begin{cases} 2p \sum\limits_{i=0}^{k-1} (4p)^i, & \text{если } kp + \lfloor k/4 \rfloor \leqslant d < kp + \lfloor k/2 \rfloor, \\ (2p+1) \sum\limits_{i=0}^{k-1} (4p+1)^i, & \text{если } kp + \lfloor k/2 \rfloor \leqslant d < k(p+1), \\ (2p+2) \sum\limits_{i=0}^{k-1} (4p+3)^i, & \text{если } k(p+1) \leqslant d < k(p+1) + \lfloor k/4 \rfloor. \end{cases}$$

Пример 2. Пусть $k = 7$. Тогда в силу теоремы 16

$$M(d, 7) \geqslant 10922 \ \text{ для } \ 11 \leqslant d \leqslant 17.$$

Теорема 22 дает следующие оценки:

$$M(d, 7) \geqslant n = \begin{cases} 58593 & \text{для } 10 \leqslant d \leqslant 13, \\ 549028 & \text{для } d = 14, \\ 1198372 & \text{для } 15 \leqslant d \leqslant 16, \\ 2989355 & \text{для } d = 17. \end{cases}$$

Указанные значения n и нижние границы d достигаются для образующих $S = \{1, s, s^2, s^3, s^4, s^5, s^6\}$ со значениями s, равными 5, 7, 8 и 9 соответственно.

Для дальнейших исследований предлагаем следующие открытые вопросы.

Задача 7. Улучшить найденные выше оценки достижимого порядка циркулянтных графов размерностей $k \geqslant 4$ и найти семейства графов, достигающих эти оценки.

Задача 8. Разработать аналитические методы решения задачи поиска кратчайших путей для таких сетей с минимальной структурной задержкой.

7. Методы синтеза оптимальных циркулянтов

Основными методами, используемыми для построения регулярных графов с минимальным диаметром и/или минимальным средним расстоянием, являются локальный поиск и поиск в ширину: работы М. Имаса и М. Итона [66], В. В. Корнеева [9], О. Г. Монахова [12], Х. Стоуна [106], С. Тога и К. Стейглица [107], Ш. Чена и Х.-Д. Джиа [41] (в последнем случае — синтез трехмерных циркулянтов). Ограничением этих алгоритмов является большое время исполнения при больших значениях числа вершин n и размерности k.

Для произвольных циркулянтных графов с $k \geqslant 3$ трудной проблемой является определение существования оптимального графа для заданных n и k. В работе [41] найдены интервалы существования оптимальных графов для $k = 3$ и $n \leqslant 1000$ и показано, что по крайней мере субоптимальные графы существуют для всех рассмотренных n. В [21] аналогичные результаты получены для $k = 3$ и $n \leqslant 10000$. Что касается произвольных значений $k \geqslant 3$, то бесконечные семейства оптимальных многомерных циркулянтов найдены только для диаметра, равного двум [17].

В литературе описано также несколько эвристических алгоритмов синтеза циркулянтов с минимальным диаметром и/или минимальным средним расстоянием. С. В. Труфанов [24] получил алгоритм для сокращения диаметра максимально связных графов, включая циркулянтные графы. В. А. Воробьев [3] предложил алгоритм синтеза для двумерных циркулянтов. Д. Цвиели [109] получила границы оптимальных образующих для двумерных циркулянтов $C(n; 1, s)$ и алгоритм их вычисления, если они существуют. Автором разработан алгоритм синтеза оптимальных (предельно оптимальных) циркулянтов размерностей $k \geqslant 2$ и получен каталог этих сетей для $2 \leqslant k \leqslant 5$ [14].

Новый подход, основанный на задании темплейтов и множества входных-выходных пар и использующий эволюционные вычисления, предложен О. Г. Монаховым [13] и использован в [22, 82, 83] для синтеза графов. Представленный алгоритм эволюционного синтеза интегрировал преимущества генетических алгоритмов и генетического программирования и был применен для автоматического переоткрытия и открытия некоторых графовых, вычислительных и комбинаторных алгоритмов. Основная идея алгоритма состоит в эволюционных преобразованиях над множествами аналитических описаний графов (формул), основанных на естественной селекции: выживает «сильнейший». Функция пригодности оценивает в одном случае семейство графов с максимальным числом вершин для заданных диаметров, в другом — сумму диаметров для циркулянтных графов с заданными размерностью, множествами образующих и порядками.

Алгоритм переоткрыл известные семейства графов. Кроме того, для семейства из [41] был найден новый вид образующих. Для $k = 3$ и $k = 4$ алгоритм автоматически породил описания новых неизвестных ранее семейств, которые соответствуют циркулянтным графам с лучшими экстремальными свойствами для большой области изменения диаметров.

8. Парные обмены в циркулянтах

Большинство семейств циркулянтов, описанных в литературе, изучаются как сети связи мультипроцессорных систем. Их коммуникационные свойства также очень важны.

При парной маршрутизации сообщение посылается из вершины-источника в вершину-приемник. Это одна из наиболее важных коммуникационных проблем для любой сети. Алгоритм парной маршрутизации оптимален, если сообщение посылается между любыми двумя вершинами вдоль кратчайшего пути. Есть два типа стратегий парной маршрутизации: коммутация сообщений (store-and-forward routing) и коммутация каналов (wormhole routing). При *коммутации сообщений* сообщение полностью находится в вершине перед передачей в следующую вершину на пути к приемнику. При *коммутации каналов* сначала в сети выделяется весь путь из источника в приемник посредством передачи заголовка сообщения, затем сообщение передается вдоль настроенных каналов между источником и приемником. Один и тот же алгоритм парной маршрутизации может быть адаптирован для обеих стратегий.

Известен алгоритм Дейкстры поиска кратчайшего пути с квадратичной сложностью $\mathrm{O}(n^2)$, применимый для любого связного графа порядка n. Дж. Кей с соавт. [40] установили, что в произвольных циркулянтных графах проблема поиска кратчайшего пути с использованием множества образующих $S = \{s_1, s_2, ..., s_k\}$ является NP-трудной. Предложены различные алгоритмы поиска кратчайших путей с допустимыми оценками для двумерных циркулянтных сетей [16, 42, 52, 57, 87, 90, 99, 100], а также для некоторых семейств трехмерных циркулянтов.

Для размерности $k = 2$ К. Мукхопадхая и Б. Синха (1995 г.) [87] дали отказоустойчивый алгоритм в сетях вида $C(n; 1, s)$ с оценкой $\mathrm{O}(d)$, где d — диаметр графа, и субоптимальный алгоритм — превышающий оптимальный не более чем на единицу в случае единичного отказа вершины или ребра. Для графов вида $C(n; s_1, s_2)$, $1 \leqslant s_1 < s_2 < n$, Б. Робич (1996 г.) [99] разработал алгоритм парных обменов по кратчайшим путям. Алгоритм требует $\mathrm{O}(d)$ времени для инициализации и $l = \mathrm{O}(d)$ шагов, где l — расстояние между вершинами, а d — диаметр сети. Д. Гомес и др. (2007 г.) [57] представил полиномиальной сложности алгоритм вычисления кратчайшего пути между двумя вершинами циркулянтного графа степени четыре. Он требует $\mathrm{O}(\log^3 n)$ бит операций в графе порядка n и основан на определении вектора кратчайших путей в специальном классе решеток для L_1-норм. В 2005 г. Б. Чен с соавт. [42] представили оптимальный алгоритм для двумерных циркулянтов с константной сложностью, требующий предопределения четырех параметров укладки в виде буквы L графа $C(n; s_1, s_2)$ (*L-shape tile* [111]) и решения сравнения $s_1 x + s_2 y \equiv 1 \pmod{n}$.

Для оптимальных графов $C(n; D, D + 1)$, $D \geqslant 1$, любых порядков в [16] получен отказоустойчивый алгоритм поиска кратчайших путей со сложностью $\mathrm{O}(1)$. В 1997 г. Й. Фабрега и М. Зарагоса [52] исследовали оптимальные графы $C(n_D; 1, 2D + 1)$ и $C(n_D; D, D + 1)$ и получили покрывающее дерево кратчайших путей и оценки отказоустойчивости предложенного алгоритма маршрутизации. К. Мартинес и др. [78], используя пометку вершин тороидальных графов посредством гауссианских целых, получили, в частности, алгоритм поиска кратчайшего пути в циркулянтах вида (1) с $n = n_D$ с оценкой $\mathrm{O}(D)$. Эти авторы в 2007 г. показали, что расстояние в двумерных циркулянтах является подходящей метрикой для того, чтобы конструировать совершенные коды, исправляющие ошибки. В 2009 г. Б. Б. Нестеренко и М. А. Новотарский [23] разработали алгоритм оптимального парного обмена в клеточных нейронных сетях для семейства циркулянтов вида $C(n; \sqrt{n}/2 - 1, \sqrt{n})$, $n = 2^{2i}$, $i \geqslant 3$. Алгоритм включает прямые и альтернативные маршруты между двумя нейронами сети.

Следует отметить, что вычисление кратчайших путей в оптимальных циркулянтных сетях степени четыре требует меньшего числа операций, чем аналогичная процедура, найденная Б. Арденом и Х. Ли в [28] для хордальных кольцевых сетей степени три, которые являются подграфами циркулянтов.

В работах [73, 90] изучается возможность эффективного использования интервальной маршрутизации в циркулянтных сетях. Интервальная маршрутизация основана на представлении таблиц маршрутизации, находящихся в каждой вершине, в компактной форме. В 1997 г. Л. Нараянан и Я. Опатни [90] исследовали схемы компактной и интервальной маршрутизаций в графах $C(n;1,s)$, включая графы $C(n_D;1,2D+1)$. Схема маршрутизации для любой такой сети требует $\mathrm{O}(\log n)$ бит информации в каждой вершине и $\mathrm{O}(1)$ времени для вычисления кратчайшего пути до любого приемника. Даны границы для схем интервальной маршрутизации таких сетей. В 1999 г. Б. Манс [73] использовал результаты из [90] для рассмотрения интервальной маршрутизации в графах общего вида $C(n;1,s)$. Точное определение интервальной маршрутизации и более детальную информацию о ней можно найти в [55].

Для размерности $k=3$ А. Листман с соавт. [72] исследовали сетевые свойства трехмерных циркулянтов, используя в качестве модели сети связи семейство циркулянтов с $n=\mathrm{O}(3d^2)$ из [114], и получили решение проблемы поиска кратчайших путей по описанию графа. Л. Барриере с соавт. [30] нашли алгоритм поиска кратчайших путей в этих сетях. В [72] решена проблема кратчайших путей для эквивалентного графа вида $C(3d^2+3d+1;d,d+1,2d+1)$. Автором показано [81], что проблема поиска кратчайших путей для семейства трехмерных циркулянтов максимального порядка при заданном диаметре имеет сложность $\mathrm{O}(1)$ и решается простым аналитическим методом. Получена также функция расстояний для этих графов.

9. Трансляционные и полные обмены

Организация трансляционных и полных обменов является одной из наиболее актуальных задач в сетевых коммуникациях и параллельных вычислительных системах (см., например, [10, 21, 59, 96]). При *трансляционном* обмене (broadcasting) сообщение, первоначально содержащееся в одной вершине сети (называемой источником), должно быть передано во все другие вершины. При *полном* обмене (gossiping) каждая вершина содержит сообщение, которое должно быть передано во все другие вершины. Эти типы сетевых коммуникаций имеют место при решении многих проблем параллельных вычислений, а также при глобальной процессорной синхронизации или обновлении распределенных баз данных. Поэтому большое количество работ посвящено поиску эффективных алгоритмов этих коллективных обменов. Основными мерами эффективности данных алгоритмов являются число требуемых шагов (время) и число элементарных передач между парами вершин.

Трансляционные обмены в оптимальных двумерных циркулянтах исследовались в [16, 45, 72, 78, 80, 92] при различных коммуникационных моделях. В 1982 г. автором представлен алгоритм трансляционного обмена для оптимальных графов вида (1) любого порядка с временем, равным диаметру графа [16]. Результат получен в n-портовой модели (shouting model), когда вершина может информировать всех своих соседей в течение одной единицы времени. Важной особенностью алгоритма является то, что он работает без дублирования пакетов и использует для каждой транзитной вершины i покрывающее дерево кратчайших путей с центром в i. К. Мартинес и др. [78], используя алгебраический подход, получили в n-портовой модели алгоритм трансляционного обмена для всех гауссианских сетей, включая циркулянты вида (1) с $n=n_D$ с оценкой D, где D — диаметр сети. В 1998 г. А. Листман и др. [72] определили, что время трансляционного обмена для этих сетей равно $D+2$. Эти результаты получены в 1-портовой модели (whispering model): в течение каждой единицы времени вершина может информировать не более одного соседа.

Рассматривая варианты трансляционных обменов, которые имеют сходство с распространением компьютерных вирусов в сетях, Ф. Комеллас и соавт. [45] в 2002 г. получили конструкции оптимальных деревьев трансляционного обмена и оценку его времени для оптимальных двумерных циркулянтов из [38] в коммуникационной модели, когда каждая вершина может информировать i, $2 \leqslant i \leqslant 4$, вершин во время каждого шага, когда она активна. В 2005 г. Н. Обрадович с соавт. [92] ввели пересмотренное по сравнению с [72] и основанное на отказоустойчивости определение оптимальности дерева трансляционного обмена для i-портовой модели. Они дали конструкции оптимальных деревьев трансляционного обмена для i-портовых сетей, $1 \leqslant i \leqslant 4$, моделируемых оптимальными графами $C(n; D, D+1)$ диаметра D, где $n \in R(D)$.

Для размерности $k = 3$ в [72] получено время трансляционного обмена, равное $d+3$ для циркулянтов вида $C(3d^2+3d+1; d, d+1, 2d+1)$ диаметра d в 1-портовой модели. Трехмерные графы из теоремы 14 с максимально возможным порядком для заданного диаметра изучались как коммуникационная сеть в работах [18, 58]. Автором представлен [18] алгоритм трансляционного обмена для этих сетей с временем, равным диаметру d графа в n-портовой модели. Х. Харутюнян и Э. Марачлян [58] в 2008 г. получили алгоритмы и оценки трансляционного обмена в этих сетях в 1-портовой модели и доказали, что $d+2$ есть нижняя граница времени обмена. Результаты получены с использованием следующей теоремы.

Теорема 23. Если циркулянт C диаметра d имеет более чем $d+2$ вершины на расстоянии d от вершины 0, то время трансляционного обмена в C удовлетворяет неравенству $b(C) \geqslant d+2$.

Для многомерных циркулянтных графов любой степени $2k$ они также показали, что $d+2k-1$ есть верхняя граница времени трансляционного обмена, и представили алгоритм, который информирует все вершины любого циркулянта степени $2k$ и диаметра d самое большее за $d+2k-1$ единиц времени.

Для произвольной размерности k Ф. Комеллас и др. [45] рассмотрели приложение циркулянтных сетей в модели «малого мира» и получили оценки времени трансляционного обмена для циркулянтов степени $v = 2k$ и вида $C(n; 1, 2, \ldots, k)$ в коммуникационной модели, когда каждая вершина может информировать $i \leqslant v$ вершин во время каждого шага, когда она активна.

Полный обмен в циркулянтных сетях изучался автором [16, 80] для предельно оптимальных двумерных циркулянтов. Б. Манс и И. Шпарлинский [76] предложили при решении проблемы организации полных обменов в циркулянтных графах использовать знания о ширине разреза этих графов.

10. Рекурсивные циркулянты

Коротко опишем графы, относящиеся к рекурсивным циркулянтам. В 1994 г. Ю. Парк и К. Чва [95] предложили новую топологию для мультикомпьютерных сетей, названную *рекурсивными циркулянтами*.

Определение 8. Рекурсивный циркулянт $G(N, s)$ есть циркулянтный граф вида $C(N; 1, s, s^2, ..., s^{\lceil \log_s N \rceil - 1})$, $s \geqslant 2$.

В [95] рассмотрено подмножество класса рекурсивных циркулянтов с порядком $N = cs^m$, где c и s — целые числа и $1 \leqslant c < s$. Для любого $s \geqslant 3$ рекурсивные циркулянты $G(cs^m, s)$ являются регулярными графами степеней $2m$, если $c = 1$; $2m+2$, если $c > 2$; $2m+1$, если $c = 2$. Для введенного класса графов авторы в [95] определили диаметр, среднее расстояние, рассмотрели связность и предложили простой алгоритм поиска кратчайшего пути. Позднее ряд авторов (A. Raspaud, G. Fertin, C. Micheneau, D. Biss и др.) изучили различные свойства рекурсивных циркулянтов, включая распознавание, вложимость, свойство гамильтоновости и организацию трансляционных обменов в них.

Интересно отметить, что при $c = 1$ рекурсивные циркулянты являются мультипликативными циркулянтными графами, которые рассматривались в работах [93, 94, 105, 111].

Автор благодарен всем своим коллегам за плодотворное сотрудничество, а также О. Г. Монахову за полезное обсуждение настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артамонов Г. Т.* Топология регулярных вычислительных сетей и сред. М.: Радио и связь, 1985. 192 с.
2. *Артамонов Г. Т., Тюрин В. Д.* Топология сетей ЭВМ и многопроцессорных систем. М.: Радио и связь, 1991. 248 с.
3. *Воробьев В. А.* Простейшие структуры однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. Вопросы теории и построения ВС. Новосибирск, 1974. №60. С. 35–49.
4. *Воробьев В. А., Корнеев В. В.* Некоторые вопросы теории структур однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. Вопросы теории и построения ВС. Новосибирск, 1974. №60. С. 3–16.
5. *Димитриев Ю. К.* Анализ самодиагностических свойств структур распределенных живучих вычислительных систем // Автометрия. 1996. №5. С. 71–84.
6. *Евдокимов С. А., Пономаренко И. Н.* Распознавание и проверка изоморфизма циркулянтных графов за полиномиальное время // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15. №6. С. 1–34.
7. *Евреинов Э. В., Хорошевский В. Г.* Однородные вычислительные системы. Новосибирск: Наука, 1978. 318 с.
8. *Клейнрок Л.* Коммуникационные сети. Стохастические потоки и задержки сообщений. М.: Наука, 1970. 256 с.
9. *Корнеев В. В.* О макроструктуре однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. Вопросы теории и построения ВС. Новосибирск, 1974. №60. С. 17–34.
10. *Корнеев В. В.* Параллельные вычислительные системы. М.: Нолидж, 1999. 320 с.
11. *Мартинес К., Стаффорд Э., Байвиде Р., Габидулин Э. М.* Представление гексагональных созвездий с помощью графов Эйзенштейна — Якоби // Проблемы передачи информации. 2008. Т. 44. №1. С. 3–13.
12. *Монахов О. Г.* Параметрическое описание структур однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. Вопросы теории и построения ВС. Новосибирск, 1979. №80. С. 3–17.
13. *Монахов О. Г.* Эволюционный синтез алгоритмов на основе шаблонов // Автометрия. Новосибирск, 2006. Т. 42. №1. С. 116–126.
14. *Монахова Э. А.* Синтез оптимальных диофантовых структур // Вычислительные системы. Вопросы теории и построения ВС. Новосибирск, 1979. №80. С. 18–35.
15. *Монахова Э. А.* Об аналитическом описании оптимальных двумерных диофантовых структур однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. Вопросы теории и построения ВС. Новосибирск, 1981. №90. С. 81–91.

16. *Монахова Э. А.* Алгоритмы межмашинных взаимодействий и реконфигурации графов связей в вычислительных системах с программируемой структурой // Вычислительные системы. Вопросы теории и построения ВС. Новосибирск, 1982. № 94. С. 81–102.
17. *Монахова Э. А.* Оптимальные КАИС-структуры однородных вычислительных систем // Электронное моделирование. 1985. № 3. С. 30–34.
18. *Монахова Э. А.* Трехмерные циркулянтные сети связи параллельных вычислительных систем // Автометрия. 2006. № 3. С. 106–118.
19. *Монахова Э. А.* Мультипликативные циркулянтные сети // Дискрет. анализ и исслед. опер. 2010. Т. 17. № 5. С. 56–66.
20. *Монахова Э. А.* Об одном экстремальном семействе циркулянтных сетей // Дискрет. анализ и исслед. опер. 2011. Т. 18. № 1. С. 66–76.
21. *Монахов О. Г., Монахова Э. А.* Параллельные системы с распределенной памятью: структуры и организация взаимодействий. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 242 с.
22. *Монахов О. Г., Монахова Э. А.* Синтез новых семейств оптимальных регулярных сетей на основе эволюционных вычислений и темплейтов функций // Автометрия. 2004. № 4. С. 106–116.
23. *Нестеренко Б. Б., Новотарский М. А.* Клеточные нейронные сети на циркулянтных графах // Искусственный интеллект. 2009. № 3. С. 132–138.
24. *Труфанов С. В.* Некоторые задачи о расстояниях на графе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1967. № 3. С. 61–66.
25. *Яблонский С. В.* Алгоритм построения вычислительных сетей с минимальным средним расстоянием между узлами // Тез. докл. Всес. совещ. «Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях». Новосибирск, 1980. С. 103–105.
26. *Ádám A.* Research problem 2–10 // J. Combin. Theory. 1967. No. 2. P. 393.
27. *Aguilo F., Fiol M. A., and Garcia C.* Triple Loop Networks with Small Transmission Delay // Discrete Math. 1997. V. 167/168. P. 3–16.
28. *Arden B. W. and Lee H.* Analysis of chordal ring networks // IEEE Trans. Computers. 1981. No. C-30. P. 291–295.
29. *Balaban A. T.* Reaction graphs // Graph Theoretical Approaches to Chemical Reactivity / eds. D. Bonchev and O. Mekenyan. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1994. P. 137–180.
30. *Barriere L., Fabrega J., Simo E., and Zaragoza M.* Fault-Tolerant Routings in Chordal Ring Networks // Networks. 2000. V. 36. No. 3. P. 180–190.
31. *Beivide R., Herrada E., Balcazar J. L., and Arruabarrena A.* Optimal distance networks of low degree for parallel computers // IEEE Trans. Computers. 1991. V. 40. No. 10. P. 1109–1124.
32. *Beivide R., Martinez C., Izu C., et al.* Chordal Topologies for Interconnection Networks // LNCS. 2003. V. 2858. P. 385–392.
33. *Bermond J.-C., Comellas F., and Hsu D. F.* Distributed loop computer networks: a survey // J. Parallel Distributed Comput. 1995. V. 24. P. 2–10.
34. *Bermond J.-C., Favaron O., and Maheo M.* Hamiltonian decomposition of Cayley graphs of degree four // J. Combin. Theory. Ser. B. 1989. No. 46. P. 142–153.
35. *Bermond J.-C., Illiades G., and Peyrat C.* An optimization problem in distributed loop computer networks // Third Inter. Conf. Combinatorial Math. New York, USA, June 1985. Ann. New York Acad. Sci., 1989. No. 555. P. 45–55.
36. *Bermond J.-C. and Tzvieli D.* Minimal diameter double-loop networks: Dense optimal families // Networks. 1991. No. 21. P. 1–9.

37. *Boesch F. T. and Tindell R.* Circulants and their connectivity // J. Graph Theory. 1984. No. 8. P. 487–499.
38. *Boesch F. T. and Wang J.-F.* Reliable circulant networks with minimum transmission delay // IEEE Trans. Circuits Syst. 1985. No. CAS-32. P. 1286–1291.
39. *Browne R. F. and Hodgson R. M.* Symmetric degree-four chordal ring networks // IEE Proc. 1990. V. 137. No. 4. P. 310–318.
40. *Cai J.-Y., Havas G., Mans B., et al.* On Routing in Circulant Graphs // LNCS. 1999. V. 1627. P. 360–369.
41. *Chen S. and Jia X.-D.* Undirected loop networks // Networks. 1993. No. 23. P. 257–260.
42. *Chen B.-X., Meng J.-X., and Xiao W.-J.* A Constant Time Optimal Routing Algorithm for Undirected Double-Loop Networks // First Int. Conf. Mobile Ad-hoc and Sensor Networks. MSN 2005, Wuhan, China, December 2005. P. 309–316.
43. *Chen B.-X., Meng J.-X., and Xiao W.-J.* Some new optimal and suboptimal infinite families of undirected double-loop networks // DMTCS. 2006. No. 8. P. 299–312.
44. *Chen B.-X., Xiao W.-J., and Parhami B.* Diameter formulas for a class of undirected double-loop networks // J. Intercon. Networks. 2005. V. 6. No. 1. P. 1–15.
45. *Comellas F., Mitjana M., and Peters J. G.* Broadcasting in Small-World Communication Networks // 9th Inter. Coll. on Structural Information and Communication Complexity (SIROCCO 9), 2002. Proc. Informatics. 2002. No. 13. P. 73–85.
46. *David H. A.* Enumeration of cyclic graphs and cyclic designs // J. Comb. Theory. 1972. No. 13. P. 303–308.
47. *Davis P. J.* Circulant Matrices. New York: Wiley Publ., 1979. 304 p.
48. *Delorme C. and Maheo M.* Isomorphisms of cayley multigraphs of degree four on finite abelian groups // Eur. J. Combinat. 1992. No. 13. P. 59–61.
49. *Du D.-Z., Hsu D. F., Li Q., and Xu J.* A combinatorial problem related to distributed loop networks // Networks. 1990. No. 20. P. 173–180.
50. *Elspas B.* Topological constructions on interconnection limited logic // Switch. Circ. Theor. Log. Des. 1964. No. 164. P. 133–147.
51. *Elspas B. and Turner J.* Graphs with circulant adjacency matrices // J. Comb. Theory. 1970. No. 9. P. 229–240.
52. *Fabrega J. and Zaragoza M.* Fault-tolerant routings in double fixed-step networks // Discr. Appl. Math. 1997. No. 78. P. 61–74.
53. *Feng X. and Xu M.* On isomorphisms of Cayley graphs of small valency // Algebra Colloquium. 1994. V. 1. P. 67–76.
54. *Garcia C. and Solé P.* Diameter lower bound for Waring graphs and multiloop networks // Discr. Math. 1993. No. 111. P. 257–261.
55. *Gavoille C.* A survey on interval routing // Theor. Comp. Sci. 2000. No. 245. P. 217–253.
56. *Gobel F. and Neutel E. A.* Cyclic graphs // Discr. Appl. Math. 2000. No. 99. P. 3–12.
57. *Gomez D., Gutierrez J., Ibeas A., and Beivide R.* Optimal routing in double loop networks // Theor. Comp. Sci. 2007. V. 381. Issue 1–3. P. 68–85.
58. *Harutyunyan H. A. and Maraachlian E.* Near Optimal Broadcasting in Optimal Triple Loop Graphs // IEEE 22nd Inter. Conf. on Advanced Information Networking and Applications, AINA 2008, March 25–29, Ginowan, Okinawa, Japan. P. 167–181.
59. *Hedetniemi S. M., Hedetniemi S. T., and Liestman A. L.* A survey of gossiping and broadcasting in communication networks // Networks. 1988. No. 18. P. 319–349.
60. *Hsu D. F. and Jia X. D.* Extremal problems in the combinatorial construction of distributed loop networks // SIAM J. Discr. Math. 1994. No. 7. P. 57–71.

61. *Hsu D. F. and Shapiro J.* Bounds for the minimal number of transmission delays in double loop networks // J. Combinat., Inform. Syst. Sci. 1991. No. 16. P. 55–62.
62. *Hsu D. F. and Shapiro J.* A census of tight one-optimal double loop networks // Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications / eds. J. Alavi et al. SIAM, 1991. P. 254–265.
63. *Huber K.* Codes over Tori // IEEE Trans. Inform. Theor. 1997. V. 43. No. 2. P. 740–744.
64. *Hwang F. K.* A complementary survey on double-loop networks // Theor. Comp. Sci. 2001. No. 263. P. 211–229.
65. *Hwang F. K.* A survey on multi-loop networks // Theor. Comp. Sci. 2003. No. 299. P. 107–121.
66. *Imase M. and Iton M.* Desing to minimize diameter building-block networks // IEEE Trans. Comput. 1981. No. C30. P. 439–442.
67. *Jia X.-D. and Su W.* Triple Loop Networks with Minimal Transmission Delay // Int. J. Found. Comp. Sci. 1997. V. 8. No. 3. P. 305–328.
68. *Kotsis G.* Interconnection Topologies and Routing for Parallel Processing Systems // Austrian — Hungarian Workhop, Technical Report. KFKI, 1992. P. 95–106.
69. *LaForge L. E., Korver K. F., and Fadali M. S.* What Designers of Bus and Network Architectures Should Know about Hypercubes // IEEE Trans. Comput. 2003. V. 52. No. 4. P. 525–544.
70. *Li C. H.* On isomorphisms of finite Cayley graphs — a survey // Discr. Math. 2002. V. 256. Issues 1–2. P. 301–334.
71. *Liaw S.-C., Chang G. J., Cao F., and Hsu D. F.* Fault-tolerant Routing in Circulant Networks and Cycle Prefix Networks // Ann. Comb. 1998. No. 2. P. 165–172.
72. *Liestman A. L., Opatrny J., and Zaragoza M.* Network Properties of Double and Triple Fixed-Step Graphs // Int. J. Found. Comp. Sci. 1998. No. 9. P. 57–76.
73. *Mans B.* On the Interval Routing of Chordal Rings // Inter. Symposium on Parallel Architectures, Algorithms and Networks (ISPAN 1999), 1999, Australia, IEEE Computer Society. P. 16–21.
74. *Mans B., Pappalardi F., and Shparlinski I.* On the Adam Conjecture on Circulant Graphs // LNCS. 1998. V. 1449. P. 251–260.
75. *Mans B., Pappalardi F., and Shparlinski I.* On the spectral Adam property for circulant graphs // Discr. Math. 2002. V. 254. No. 1–3. P. 309–329.
76. *Mans B. and Shparlinski I.* Bisecting and Gossiping in Circulant Graphs // LNCS. 2004. V. 2976. P. 589–598.
77. *Martinez C., Beivide R., Izu C., and Miguel-Alonso J.* Characterization of the Class of Optimal Dence Circulant Graphs of Degree Four // XIV Jornadas de Paralelismo. Leganes, Septiembre 2003. P. 1–6.
78. *Martinez C., Beivide R., Stafford E., et al.* Modeling Toroidal Networks with the Gaussian Integers // IEEE Trans. Comput. 2008. V. 57. No. 8. P. 1046–1056.
79. *Monakhova E. A.* Optimal circulant computer networks // Inter. Conf. “Parallel Computing Technologies”, Novosibirsk, USSR; World Scientific, Singapore, 1991. P. 450–458.
80. *Monakhova E. A.* Algorithms and lower bounds for p-gossiping in circulant networks // Third Inter. Symposium on Parallel Architectures, Algorithms, and Networks (I-SPAN’97), Taipei, Taiwan, Dec. 1997, IEEE Computer Society, Los Alamitos, California. P. 132–137.
81. *Monakhova E. A.* Optimal Triple Loop Networks with Given Transmission Delay: Topological Design and Routing // Inter. Network Optimization Conference, (INOC’2003), Evry/Paris, France. 2003. P. 410–415.

82. *Monakhov O. G. and Monakhova E. A.* Computer Discovery of Analytical Descriptions of Families of Circulant Networks // 6th Inter. Conf. on Soft Computing and Measurements, (SCM'2003), July 25-27, 2003, St.-Petersburg, Russia, 2003. V. 1. P. 345–348.
83. *Monakhov O. G. and Monakhova E. A.* An Algorithm for Discovery of New Families of Optimal Regular Networks // Lect. Notes Artific. Intell. 2003. V. 2843. P. 244–254.
84. *Muga F. P.* Undirected circulant graphs // Inter. Symp. on Parallel Architectures, Algorithms and Networks. IEEE, 1994. P. 113–118.
85. *Muga F. P.* Maximal Order of 3- and 5-Regular Circulant Graphs // Matimyas Matematika. 1999. V. 22. No. 3. 6 p.
86. *Muga F. P. and Yu W. E.* A Proposed Topology for a 192-Processor Symmetric Cluster with a Single-Switch Delay // Proceedings of the First Philippine Computing Science Congress. Manila, Philippines, Nov. 2000. 10 p.
87. *Mukhopadhyaya K. and Sinha B. P.* Fault-tolerant routing in distributed loop networks // IEEE Trans. Comput. 1995. V. 44. No. 12. P. 1452–1456.
88. *Muzychuk M.* On Adam's conjecture for circulant graphs // Discr. Math. 1997. V. 167/168. P. 497–510.
89. *Muzychuk M. E. and Tinhofer G.* Recognizing circulant graphs of prime order in polynomial time // The Electr. J. Combinat. R25. 1998. V. 5. No. 1. P. 501–528.
90. *Narayanan L. and Opatrny J.* Compact routing on chordal rings of degree four // eds. D. Krizanc and P. Widmayer. Sirocco 97: Proc. of the 4th Inter. Colloquium on Structural Information and Communication Complexity, Ascona, Switzerland, Carleton Scientific, 1997. P. 125–137.
91. *Narayanan L., Opatrny J., and Sotteau D.* All-to-All Optical Routing in Chordal Rings of Degree Four // Algorithmica. 2001. V. 31. No. 2. P. 155–178.
92. *Obradovic N., Peters J., and Ruzic G.* Reliable Broadcasting in Double Loop Networks // Networks. 2005. V. 46. No. 2. P. 88–97.
93. *Parhami B.* A Class of Odd-Radix Chordal Ring Networks // J. Comput. Sci. Engin. 2006. V. 4. No. 2–4. P. 1–9.
94. *Parhami B.* Chordal Rings Based on Symmetric Odd-Radix Number Systems // Inter. Conf. on Communications in Computing, Las Vegas, NV, June 27-30, 2006. P. 196–199.
95. *Park J.-H. and Chwa K.-Y.* Recursive Circulant: a New Topology for Multicomputer Networks // Proc. of the Inter. Symp. on Parallel Architectures, Algorithms, and Networks (I-SPAN'94), Kanazawa, Japan, IEEE Computer Society Press, 1994. P. 73–80.
96. *Pelc A.* Fault-Tolerant Broadcasting and Gossiping in Communication Networks // Networks. 1996. No. 28. P. 143–156.
97. *Puente V., Gregorio J.-A., Prellezo J. M., et al.* Adaptive Bubble Router: a Design to Balance Latency and Thoughput in Networks for Parallel Computers // Proc. of the 1999 Inter. Conf. on Parallel Processing, ICPP'99, September, 1999. IEEE Computer Society. P. 58–67.
98. *Puente V., Izu C., Gregorio J.-A., et al.* Improving Parallel System Performance by Changing the Arrangement of the Network Links // Intern. Conf. on Supercomputing, May 2000, Santa Fe, New Mexico, USA, ACM, 2000. P. 44–53.
99. *Robič B.* Optimal routing in 2-jump circulant networks // Tech. Report N397. Cambridge: University of Cambridge Computer Laboratory, 1996. 7 p.
100. *Robič B. and Žerovnik J.* Minimum 2-terminal routing in 2-jump circulant graphs // Comput. Artific. Intell. 2000. V. 19. No. 1. P. 37.
101. *Sampels M.* Cayley graphs as interconnection networks: A case study // Inter. Conf. Parcella'96. Berlin: Akademie Verlag, 1996. P. 67–76.

102. *Sampels M.* Large networks with small diameter // Inter. Workshop on Graph Theoretic Concepts in Computer Science (WG'97). Berlin: Springer, 1997. P. 288–302.
103. *Schinder M.* New architectures keep pace with throughput needs // Electr. Design. 1981. No. 5. P. 97–106.
104. *Shin K. G.* HARTS: A Distributed Real-Time Architecture // Computer. 1991. V. 24. No. 5. P. 25–35.
105. *Stojmenovic I.* Multiplicative circulant networks. Topological properties and communication algorithms // Discr. Appl. Math. 1997. No. 77. P. 281–305.
106. *Stone H. S.* The organization of high-speed memory for parallel block transfer data // IEEE Trans. Comput. 1970. No. 19. P. 47–53.
107. *Toueg S. and Steiglitz K.* The desing of small diameter networks by local search // IEEE Trans. Comput. 1979. No. 28. P. 537–542.
108. *Turner J.* Point-symmetric graphs with a prime number of points // J. Combin. Theory. 1967. No. 3. P. 136–145.
109. *Tzvieli D.* Minimal diameter double-loop networks. 1. Large infinite optimal families // Networks. 1991. No. 21. P. 387–415.
110. *Wilkov R. S.* Analysis and design of reliable computer networks // IEEE Trans. Comput. 1972. V. 20. No. 3. P. 660–678.
111. *Wong C. K. and Coppersmith D.* A combinatorial problem related to multimodule memory organizations // J. Assoc. Comput. Mach. 1974. No. 21. P. 392–402.
112. *Wong C. K. and Maddocks T. W.* A generalized Pascal's triangle // Fibonacci Quart. 1975. No. 13. P. 134–136.
113. *Yang Y., Funashashi A., Jouraku A., et al.* Recursive Diagonal Torus: An Interconnection Network for Massively Parallel Computers // IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems. 2001. V. 12. No. 7. P. 701–715.
114. *Yebra J. L. A., Fiol M. A., Morillo P., and Alegre I.* The diameter of undirected graphs associated to plane tessellations // Ars Combinat. 1985. No. 20B. P. 159–172.
115. *Žerovnik J. and Pisanski T.* Computing the diameter in multiple-loop networks // J. Algorithms. 1993. No. 14. P. 226–243.