# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.7

## КОНСТРУКЦИЯ МАКСИМАЛЬНОГО КЛОНА ТОЧЕЧНЫХ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУРЕШЁТКЕ ИНТЕРВАЛОВ

Н. Г. Парватов

*Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

**E-mail:** parvatov@mail.tsu.ru

В связи с задачей описания клонов точечных и минимальных точечных функций на верхней полурешётке предлагается конструкция максимальных по включению таких клонов на полурешётке интервалов решётки.

**Ключевые слова:** *клон, верхняя полурешётка, полурешётка интервалов, решётка интервалов, точечная функция, минимальная точечная функция.*

### 1. Формулировка результата

Пусть множество $L$, упорядоченное отношением $\leqslant$, является верхней полурешёткой, но не решёткой [1, 2]. Это означает, что в множестве $L$ для любых двух элементов $a$ и $b$ имеется точная верхняя грань $a+b$, а точной нижней грани $a \cdot b$ может не существовать. Полурешётка называется *точечной*, если всякий её элемент является суммой некоторых минимальных элементов полурешётки.

Основным объектом изучения являются функции $f : L^n \to L$ при $n = 1, 2, \ldots$, множество которых обозначается через $P_L$. Функция $f$ из $P_L$, зависящая от $n$ переменных, называется *монотонной*, если она сохраняет упорядочение $\leqslant$, то есть если для любых наборов $a$ и $b$ из $L^n$ выполняется импликация

$$a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b),$$

где наборы в $L^n$ сравниваются покомпонентно. Функция $f$ называется *точечной*, если для любого набора $a$ из $L^n$ выполняется равенство

$$f(a) = \sum_x f(x).$$

Здесь суммирование выполняется в полурешётке $L$ по всем (для монотонной функции $f$ достаточно — по некоторым) наборам $x$ из $L_0^n$, таким, что $x \leqslant a$, где $L_0$ — множество минимальных элементов полурешётки $L$. Точечная функция, очевидно, монотонна. Точечная функция, сохраняющая множество $L_0$, называется *минимальной точечной*. Как видно, точечная функция $f : L^n \to L$ однозначно определяется своим ограничением $f' : L_0^n \to L$. Принято называть $f$ точечным расширением функции $f'$ и обе эти функции обозначать одинаково.

Классы всех точечных и минимальных точечных функций обозначаются через $T_L$ и $\min T_L$ соответственно. Эти классы вместе с некоторыми другими классами полурешёточных функций введены в [3] для описания асинхронных управляющих систем, обладающих заданным динамическим поведением, то есть отвечающих заданными изменениями выходных состояний на заданные изменения входных. Основные классы функций на полурешётке изучались в [4−7]], в том числе в [6, 7] рассматривались проблемы полноты. В работе [4] сформулирована задача описания клонов (замкнутых классов с селекторами) в множествах точечных и минимальных точечных функций, показано, что всякий клон точечных (минимальных точечных) функций можно расширить до некоторого максимального по включению такого клона и множество последних конечно. В данной работе построены примеры максимальных таких клонов на полурешётке интервалов, введённой впервые в [4] и определяемой ниже.

Пусть множество $E$ является решёткой с упорядочением $\preccurlyeq$ и операциями $\vee$ и $\wedge$ для взятия точных верхних и нижних граней [1, 2]. Интервалом решётки $E$ будем называть пару $[a, b]$ её элементов $a$ и $b$, таких, что $a \preccurlyeq b$. Интервал $[a, a]$ будем отождествлять с элементом $a$. Обозначим через $\mathrm{in}(E, \preccurlyeq)$ множество всех интервалов и определим для них упорядочение $\preccurlyeq$ и операции $\vee$ и $\wedge$ покомпонентно:

$$[a, b] \preccurlyeq [c, d] \Leftrightarrow (a \preccurlyeq c \;\&\; b \preccurlyeq d),\ \ [a, b] \vee [c, d] = [a \vee c, b \vee d],\ \ [a, b] \wedge [c, d] = [a \wedge c, b \wedge d],$$

где $a, b, c, d$ — элементы из $E$, такие, что $a \preccurlyeq b$ и $c \preccurlyeq d$. Множество $\mathrm{in}(E, \preccurlyeq)$ становится таким образом решёткой. Оно является также верхней полурешёткой с упорядочением $\leqslant$, операцией $+$ для взятия точной верхней грани и частичной операцией $\cdot$ для взятия точной нижней грани, определёнными так:

$$[a, b] \leqslant [c, d] \Leftrightarrow (a \preccurlyeq c \;\&\; d \preccurlyeq b),\ \ [a, b] + [c, d] = [a \wedge c, b \vee d],\ \ [a, b] \cdot [c, d] = [a \vee c, b \wedge d],$$

где $a, b, c, d$ — элементы из $E$, такие, что $a \preccurlyeq b$ и $c \preccurlyeq d$, а также $a \vee c \preccurlyeq b \wedge d$ в последнем случае. Построенные алгебраические системы $(L, \preccurlyeq)$ и $(L, \leqslant)$, где $L = \mathrm{in}(E, \preccurlyeq)$, называются соответственно *решёткой* и *полурешёткой интервалов решётки* $(E, \preccurlyeq)$.

Пусть $\Pi_L$ — множество всех предикатов $p : L^n \to \{\text{И}, \text{Л}\}$ при $n = 1, 2, \ldots$ Для любого множества или набора $Y$ предикатов из $\Pi_L$ будем обозначать через $\mathrm{pol}_L(Y)$ клон всех функций из $P_L$, сохраняющих все предикаты из $Y$. Имеет место

**Теорема 1.** Пусть $(L, \preccurlyeq)$ — решётка и $(L, \leqslant)$ — полурешётка интервалов решётки $(E, \preccurlyeq)$. Клоны $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant)$ и $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant, E)$ являются максимальными по включению среди клонов, являющихся подмножествами классов $T_L$ и $\min T_L$ соответственно.

Доказательству теоремы 1 предпошлём несколько вспомогательных утверждений — лемму 1 и следствия 1 и 2.

## 2. Вспомогательные утверждения

В соответствии со сказанным множество $L = \mathrm{in}(E, \preccurlyeq)$ интервалов решётки $(E, \preccurlyeq)$ будем рассматривать как полурешётку с упорядочением $\leqslant$ и одновременно как решётку с упорядочением $\preccurlyeq$. Для любого интервала $a = [a_1, a_2]$ из $L$ положим $\mathrm{l}\,a = a_1$ и $\mathrm{r}\,a = a_2$. Положим также $\mathrm{l}\,a = (\mathrm{l}\,a_1, \ldots, \mathrm{l}\,a_n)$ и $\mathrm{r}\,a = (\mathrm{r}\,a_1, \ldots, \mathrm{r}\,a_n)$ для любого набора $a = (a_1, \ldots, a_n)$ из множества $L^n$, которое, таким образом, можно рассматривать как решётку и полурешётку интервалов решётки $E^n$. Отметим, что в $L^n$ неравенство $a \leqslant b$ равносильно паре соотношений $\mathrm{l}\,b \preccurlyeq \mathrm{l}\,a$ и $\mathrm{r}\,a \preccurlyeq \mathrm{r}\,b$, а неравенство $a \preccurlyeq b$ — паре $\mathrm{l}\,a \preccurlyeq \mathrm{l}\,b$ и $\mathrm{r}\,a \preccurlyeq \mathrm{r}\,b$. Множество $E^n$ является множеством минимальных элементов полурешётки $L^n$ (упорядоченной отношением $\leqslant$). При этом каждый набор $a$ из $L^n$ представи́м суммой $a = \mathrm{l}\,a + \mathrm{r}\,a$ наборов $\mathrm{l}\,x$ и $\mathrm{l}\,y$ из $E^n$. В частности, полурешётка $L^n$ точечная.

**Лемма 1.** Пусть $(L, \preccurlyeq)$ — решётка, $(L, \leqslant)$ — полурешётка интервалов решётки $(E, \preccurlyeq)$ и $g$ — функция из $P_L$ от $n$ переменных.

1. Если функция $g$ принадлежит клону $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant)$, то в множестве $P_E$ найдутся функции $g_\mathrm{l}$ и $g_\mathrm{r}$ от $n$ переменных, такие, что

1) функции $g_\mathrm{l}$ и $g_\mathrm{r}$ принадлежат клону $\mathrm{pol}_E(\preccurlyeq)$;
2) $g_\mathrm{l}(x) \preccurlyeq g_\mathrm{r}(x)$ для всех $x$ из $E^n$;
3) $g(x) = g_\mathrm{l}(\mathrm{l}\,x) + g_\mathrm{r}(\mathrm{r}\,x)$ для всех $x$ из $L^n$;
4) $g_\mathrm{l}(\mathrm{l}\,x) = \mathrm{l}\,g(x) = \mathrm{l}\,g(\mathrm{l}\,x)$ и $g_\mathrm{r}(\mathrm{r}\,x) = \mathrm{r}\,g(x) = \mathrm{r}\,g(\mathrm{r}\,x)$ для любого набора $x$ из $L^n$ (в частности, функции $g_\mathrm{l}$ и $g_\mathrm{r}$ однозначно определяются функцией $g$).

2. Обратно, если для функций $g_\mathrm{l}$ и $g_\mathrm{r}$ из $P_E$ от $n$ переменных выполняются условия 1–3, то для них выполняется и условие 4 и функция $g$ принадлежит клону $\mathrm{pol}(\preccurlyeq, \leqslant)$.

3. Функция $g$ из клона $\mathrm{pol}(\preccurlyeq, \leqslant)$ принадлежит клону $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant, E)$ тогда и только тогда, когда функции $g_\mathrm{l}$ и $g_\mathrm{r}$, определённые условиями 1–3, совпадают.

***Доказательство.*** Докажем первое утверждение леммы. Пусть функция $g$ принадлежит клону $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant)$. Тогда для любого набора $x$ из множества $L^n$ выполняются неравенства $\mathrm{l}\,x \preccurlyeq x \preccurlyeq \mathrm{r}\,x$, а в силу монотонности функции $g$ относительно упорядочения $\preccurlyeq$ выполняются также неравенства $g(\mathrm{l}\,x) \preccurlyeq g(x) \preccurlyeq g(\mathrm{r}\,x)$, из которых следует, что $g(x) \leqslant g(\mathrm{l}\,x) + g(\mathrm{r}\,x)$. Из монотонности функций $g$ и $+$ относительно упорядочения $\leqslant$ следует обратное неравенство (поскольку $\mathrm{l}\,x \leqslant x$ и $\mathrm{r}\,x \leqslant x$) и тогда

$$g(x) = g(\mathrm{l}\,x) + g(\mathrm{r}\,x).$$

Отсюда, учитывая неравенство $g(\mathrm{l}\,x) \preccurlyeq g(\mathrm{r}\,x)$, получаем

$$\mathrm{l}\,g(\mathrm{l}\,x) = \mathrm{l}\,g(x) \preccurlyeq \mathrm{r}\,g(x) = \mathrm{r}\,g(\mathrm{r}\,x).$$

Из доказанного видно, что функции $g_\mathrm{l}$ и $g_\mathrm{r}$ корректно определены четвёртым условием леммы, принадлежат клону $P_E$ и для них выполняются второе и третье условия. Поскольку первое условие легко следует из монотонности функции $g$ относительно упорядочения $\preccurlyeq$, первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение. Из первых двух условий следует, что для любого набора $x$ из $L^n$

$$g_\mathrm{l}(\mathrm{l}\,x) \preccurlyeq g_\mathrm{l}(\mathrm{r}\,x) \preccurlyeq g_\mathrm{r}(\mathrm{r}\,x),$$

тогда из третьего условия

$$\mathrm{l}\,g(x) = g_\mathrm{l}(\mathrm{l}\,x) \quad \text{и} \quad \mathrm{r}\,g(x) = g_\mathrm{r}(\mathrm{r}\,x),$$

и, подставляя $\mathrm{l}\,x$ и $\mathrm{r}\,x$ вместо $x$, получаем

$$\mathrm{l}\,g(\mathrm{l}\,x) = g_\mathrm{l}(\mathrm{l}\,x) \quad \text{и} \quad \mathrm{r}\,g(\mathrm{r}\,x) = g_\mathrm{r}(\mathrm{r}\,x);$$

тем самым установлено четвёртое условие. Монотонность функции $g$ относительно упорядочения $\preccurlyeq$ проверяется непосредственно: для любых наборов $x$ и $y$ из $L^n$, таких, что $x \preccurlyeq y$, выполняется $\mathrm{l}\,x \preccurlyeq \mathrm{l}\,y$ и $\mathrm{r}\,x \preccurlyeq \mathrm{r}\,y$, откуда с использованием первого и четвёртого условий получаем

$$\mathrm{l}\,g(x) = g_\mathrm{l}(\mathrm{l}\,x) \preccurlyeq g_\mathrm{l}(\mathrm{l}\,y) = \mathrm{l}\,g(y) \quad \text{и} \quad \mathrm{r}\,g(x) = g_\mathrm{r}(\mathrm{r}\,x) \preccurlyeq g_\mathrm{r}(\mathrm{r}\,y) = \mathrm{r}\,g(y).$$

Таким образом, $g(x) \preccurlyeq g(y)$ и функция $g$ монотонна относительно упорядочения $\preccurlyeq$. Монотонность относительно упорядочения $\leqslant$ устанавливается тем же способом с учётом того, что неравенство $x \leqslant y$ равносильно паре соотношений $\mathrm{l}\,y \preccurlyeq \mathrm{l}\,x$ и $\mathrm{r}\,x \preccurlyeq \mathrm{r}\,y$.

Докажем третье утверждение леммы. Для этого заметим, что в силу доказанного всякая функция $g$, принадлежащая клону $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant)$, точечная, поскольку $g(x) = g(\mathrm{l}\,x) + g(\mathrm{r}\,x)$. Более того, она является точечным расширением функции $g_\mathrm{l} + g_\mathrm{r}$ (где функции $g_\mathrm{l}$ и $g_\mathrm{r}$ определяются условием 4). Это следует из условия 3, в силу которого $g(x) = g_\mathrm{l}(x) + g_\mathrm{r}(x) = (g_\mathrm{l} + g_\mathrm{r})(x)$ для любого набора $x$ из множества $E^n$ минимальных элементов полурешётки $L^n$. Функция $g$ является минимальной точечной, т. е. принадлежит клону $\mathrm{pol}_E(\preccurlyeq, \leqslant, E)$, в том и только в том случае, когда функция $g_\mathrm{l} + g_\mathrm{r}$ принадлежит множеству $P_E$, т. е. принимает значения в множестве $E$ при любых значениях переменных. Это равносильно тому, что функции $g_\mathrm{l}$ и $g_\mathrm{r}$ совпадают. ■

**Следствие 1.** Пусть $(L, \preccurlyeq)$ — решётка и $(L, \leqslant)$ — полурешётка интервалов решётки $(E, \preccurlyeq)$. Клон $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant)$ состоит из всевозможных сумм функций из $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant, E)$ с одинаковым числом переменных. В частности, для любого натурального числа $n$ множество $n$-местных функций клона $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant)$ замкнуто сложением и является точечной полурешёткой с упорядочением $\leqslant$.

***Доказательство.*** В соответствии с леммой 1 функция $g$ из клона $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant)$ есть точечное расширение суммы $g_\mathrm{l} + g_\mathrm{r}$ функций $g_\mathrm{l}$ и $g_\mathrm{r}$ из $P_E$ и тогда в силу коммутативности сложения является суммой точечных расширений этих функций. Но точечные расширения этих функций являются минимальными точечными функциями из клона $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant, E)$ в силу той же леммы. Первое утверждение следствия доказано. Второе следует из доказанного. ■

Далее через $\mathrm{pol}_{L,E}(\preccurlyeq)$ обозначается множество всех функций $f : E^n \to L$ при $n = 1, 2, \ldots$, сохраняющих упорядочение $\preccurlyeq$.

**Следствие 2.** Пусть $(L, \preccurlyeq)$ — решётка и $(L, \leqslant)$ — полурешётка интервалов решётки $(E, \preccurlyeq)$. Тогда клон $\mathrm{pol}(\preccurlyeq, \leqslant)$ состоит из всевозможных точечных расширений функций из класса $\mathrm{pol}_{L,E}(\preccurlyeq)$, а клон $\mathrm{pol}_E(\preccurlyeq, \leqslant, E)$ — из всевозможных точечных расширений функций из клона $\mathrm{pol}_E(\preccurlyeq)$.

***Доказательство.*** В силу леммы 1 функция $g$ из клона $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant)$ является точечным расширением суммы $g_\mathrm{l} + g_\mathrm{r}$ функций $g_\mathrm{l}$ и $g_\mathrm{r}$ из $P_E$, причём указанная сумма монотонна относительно упорядочения $\preccurlyeq$ вслед за функциями $g_\mathrm{l}, +, g_\mathrm{r}$, то есть принадлежит классу $\mathrm{pol}_{L,E}(\preccurlyeq)$. Для (минимальной точечной) функции $g$ из клона $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant, E)$ функции $g_\mathrm{l}$ и $g_\mathrm{r}$ совпадают между собой и с их суммой, а потому сама функция $g$ является точечным расширение функции $g_\mathrm{l} + g_\mathrm{r} = g_\mathrm{l} = g_\mathrm{r}$ из клона $\mathrm{pol}_E(\preccurlyeq)$.

Обратно, всякую функцию $G$ из множества $\mathrm{pol}_{L,E}(\preccurlyeq)$ можно представить в виде суммы $G = g_\mathrm{l} + g_\mathrm{r}$ двух функций $g_\mathrm{l} = \mathrm{l}\,G$ и $g_\mathrm{r} = \mathrm{r}\,G$, таких, что $g_\mathrm{l} \preccurlyeq g_\mathrm{r}$, монотонных относительно упорядочения $\preccurlyeq$ вслед за $G$, что проверяется непосредственно, и совпадающих в случае функции $G$, принадлежащей клону $\mathrm{pol}_E(\preccurlyeq)$. Тогда функция $g$, определённая в соответствии с третьим условием из леммы 1, принадлежит клону $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant)$ и является точечным расширением функции $G$. Взяв функцию $G$ из клона $\mathrm{pol}_E(\preccurlyeq)$, получим совпадающие функции $g_\mathrm{l}$ и $g_\mathrm{r}$ из $\mathrm{pol}_E(\preccurlyeq)$, точечным расширением которых является функция $g$. ■

## 3. Доказательство теоремы 1

Максимальность клона $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant, E)$ следует из того, что клон $\mathrm{pol}_E(\preccurlyeq)$ — предполный в $P_E$ и минимальная точечная функция из $\min T_L$ однозначно определяется своим ограничением из $P_E$. Приведём, однако, более общее рассуждение, охватывающее оба случая, присутствующих в формулировке теоремы.

Пусть $K$ — клон $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant)$ (или $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant, E)$) и его удаётся расширить до клона $K' \subseteq T_L$ (соответственно до клона $K' \subseteq \min T_L$), содержащего немонотонную относительно упорядочения $\preccurlyeq$ функцию $f$ из $T_L$, зависящую от $n$ переменных. Для доказательства нужно получить противоречие.

Заметим, что немонотонную относительно упорядочения $\preccurlyeq$ функцию в клоне $K'$ можно выбрать от одной переменной. Действительно, в рассматриваемой ситуации упорядочение $\preccurlyeq$ нарушается функцией $f$ на паре наборов $A$ и $B$ из $L^n$, для которых выполняется неравенство $A \preccurlyeq B$, в отличие от неравенства $f(A) \preccurlyeq f(B)$. Такие наборы $A$ и $B$ можно выбрать уже в множестве $E^n$ (в противном случае функция $f$ является точечным расширением монотонной относительно упорядочения $\preccurlyeq$ функции из $\mathrm{pol}_{L,E}(\preccurlyeq)$, и тогда она сама сохраняет это упорядочение по следствию 2 вопреки её выбору). Более того, эти наборы можно выбрать отличающимися одной компонентой так, что $A = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ и $B = (a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ для некоторых элементов $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ и $a, b$ из $E$. Тогда немонотонной относительно упорядочения $\preccurlyeq$ является одноместная функция $s(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, принадлежащая клону $K'$ (вслед за функцией $f$ и подставленными в неё константами $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ из $E$). Монотонность функции $s$ нарушается на элементах $a$ и $b$ из $E$, для которых выполняется неравенство $a \preccurlyeq b$ и не выполняется неравенство $s(a) \preccurlyeq s(b)$. Элементы $a$ и $b$ можно выбрать соседними в решётке $E$ так, что в ней не существует элемента $c$ со свойством $a \prec c \prec b$. Для дальнейшего важно, что такой выбор элементов $a$ и $b$ гарантирует отсутствие отличного от них элемента $c$ в множестве $E$ со свойством $c \leqslant a + b$. Невыполнение неравенства $s(a) \preccurlyeq s(b)$ означает, что не выполняется некоторое из неравенств

$$\mathrm{l}\, s(a) \preccurlyeq \mathrm{l}\, s(b) \quad \text{или} \quad \mathrm{r}\, s(a) \preccurlyeq \mathrm{r}\, s(b). \tag{1}$$

Пусть это будет первое. Обозначим через 0 и 1 соответственно наименьший и наибольший элементы решётки $(E, \preccurlyeq)$. Рассмотрим одноместные минимальные точечные функции $t_1$ и $t_2$ из $\min T_L$, принимающие значения 0 и 1 на элементах из $E$ в соответствии со следующими условиями: $t_1(x) = 1$, если $b \preccurlyeq x$; $t_2(x) = 1$, если $\mathrm{l}\, s(a) \preccurlyeq x$. По следствию 2 функции $t_1$ и $t_2$ принадлежат клону $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant, E)$ и тогда клону $K'$. Рассмотрим функцию $g(x) = t_1(x) \vee t_2(s(x))$ из $K'$. Заметим, что $g(a) = g(b) = 1$, так как $t_2(s(a)) = 1$ и $t_1(b) = 1$. Вместе с тем

$$g(a + b) = [0, 1] \neq 1 = g(a) + g(b),$$

так как $t_1(a+b) = [0, 1]$ и $t_2(s(a+b)) \geqslant t_2(s(a)) + t_2(s(b)) = 0 + 1 = [0, 1]$. Таким образом, функция $g$ не точечная. Получено противоречие.

Случай, когда не выполняется второе неравенство в (1), рассматривается аналогично. Теорема доказана.

## 4. Замечание

В работе [4] автора допущены следующие неточности: на с. 33 в выделенной формуле должно быть $\perp K = \perp \max(K, \leqslant)$ (то есть max вместо min); в следствии 5 условие $f^{-1}(0) = \perp f^{-1}(1)$ следует пополнить требованием $f^{-1}(1) \neq \varnothing$ и в теореме 10 второе условие — требованием $B^* \subseteq f^{-1}(1) \cup f^{-1}(\top)$, означающим, что функция $x^B$ не принимает значения $\top$, когда функция $f$ принимает значение 0.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Биркгоф Г.* Теория решёток. М.: Наука, 1984. 568 с.
2. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973. 400 с.
3. *Агибалов Г. П.* Дискретные автоматы на полурешётках. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1993. 227 с.
4. *Парватов Н. Г.* Точечные и сильно точечные функции на полурешётке // Прикладная дискретная математика. 2010. № 3. С. 22–40.
5. *Парватов Н. Г.* Об инвариантах некоторых классов квазимонотонных функций на полурешётке // Прикладная дискретная математика. 2009. № 4. С. 21–28.
6. *Парватов Н. Г.* Функциональная полнота в замкнутых классах квазимонотонных и монотонных трёхзначных функций на полурешётке // Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1. 2003. Т. 10. № 1. С. 61–78.
7. *Парватов Н. Г.* Теорема о функциональной полноте в классе квазимонотонных функций на конечной полурешётке // Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1. 2006. Т. 13. № 3. С. 62–82.