УДК 519.1

ФОРМУЛА ДЛЯ ЧИСЛА СОЧЕТАНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

В. В. Гоцуленко

Институт технической теплофизики НАН Украины, г. Киев, Украина

E-mail: gosul@ukr.net

Получены различные обобщения понятия числа сочетаний с повторениями. Найдены формулы для вычисления введённых комбинаторных чисел и рассмотрены различные задачи, которые решаются с их применением.

Ключевые слова: *сочетания с повторениями при ограничениях, диофантовы уравнения, формальный полином, производящие функции, мультимножества.*

Введение

Всё разнообразие комбинаторных формул может быть фактически выведено из нескольких основных утверждений, касающихся конечных множеств [1, 2]. Тем не менее во многих отношениях полезно вводить различные комбинаторные числа, характеризующие те или иные количественные соотношения на множествах произвольной природы. Классические понятия числа сочетаний, размещений и перестановок в случае возможности дублирования элементов в выборках обобщаются в различных направлениях. Так, в частности, возникают сочетания, размещения и перестановки с повторениями [1]. Существует множество комбинаторных задач, которые можно эффективно решать, не обращаясь всякий раз к основным принципам комбинаторики, например к правилу произведения, а используя различные обобщения основных комбинаторных чисел.

Непосредственное прикладное применение комбинаторных чисел связано с подсчётом количества подмультимножеств заданного мультимножества [3], обладающих определёнными свойствами. При этом данная задача может рассматриваться и как универсальный способ построения и классификации комбинаторных чисел в зависимости от задаваемых свойств подмультимножеств.

Первичная спецификация мультимножества приводит к задаче подсчета m-элементных подмультимножеств заданного мультимножества с фиксированными весами его элементов. Например, в [4] получена формула для решения данной задачи. В [5] на основе данной формулы получено выражение, более удобное для проведения вычислений. В этой же работе получена формула для числа упорядоченных подмультимножеств. Другой подход для определения количества m-элементных подмультимножеств заданного мультимножества через их вторичные спецификации рассматривается в [6].

В данной работе получено несколько новых возможных способов обобщения понятия числа сочетаний с повторениями и рассмотрены некоторые комбинаторные задачи, решаемые с их помощью. В частности, полученные результаты имеют непосредственное применение к задаче о подсчёте количества подмультимножеств заданного мультимножества.

1. Определение числа сочетаний с повторениями при ограничениях

Формулировка достаточно общей комбинаторной задачи, приводящей к сочетаниям с повторениями, может быть следующей: имеется большое число предметов, например бесконечное, n различных типов. Необходимо определить, сколько из них можно составить различных m-элементных наборов, не принимая во внимание порядок элементов. В качестве точной формализации понятия k-элементного набора можно рассматривать n-компонентный вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_k означает количество элементов k-го типа, $k = 1, \ldots, n$, в соответствующем m-элементном наборе.

Следовательно, исходная задача эквивалентна задаче определения количества неотрицательных решений линейного диофантова уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m, \tag{1}$$

где $x_k \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, n$. Для числа сочетаний с повторениями в литературе используются различные обозначения, например $\overline{C}_n^m$ или f_n^m; будем придерживаться последнего обозначения. Решение задачи (1) дается следующей формулой [1]:

$$f_n^m = C_{n-1+m}^{n-1},$$

где C_n^m — число сочетаний без повторений из n элементов по m элементов.

Если в исходной задаче количество элементов каждого типа не является бесконечным, а ограничено некоторым числом, для каждого типа своим, то приходим к понятию числа сочетаний с повторениями при ограничениях. Иными словами, рассмотрим следующую комбинаторную задачу. Имеется n ящиков с конфетами. Разрешается взять ровно m конфет из этих ящиков, причём из k-го ящика разрешается взять не более m_k конфет. Необходимо найти, сколькими способами это можно сделать. Формулировка данной задачи в терминах диофантовых уравнений следующая: необходимо найти количество неотрицательных решений линейного диофантова уравнения (1) при наличии ограничений

$$0 \leqslant x_k \leqslant m_k, \ k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Обозначим данное число символом $f_n^m\,[m_1, m_2, \ldots, m_n]$ и будем его называть числом сочетаний с повторениями из n типов элементов по m элементов при (простых) ограничениях, определяемых неравенствами (2).

Замечание 1. Несложно проверить, что решение задачи (1), (2), т. е. формула для $f_n^m\,[m_1, m_2, \ldots, m_n]$, имеет смысл лишь при $m_k \geqslant 0$ для $k = 1, \ldots, n$ и $m_1 + m_2 + {} + \ldots + m_n \geqslant m$.

Задача (1), (2) также может быть сформулирована как задача подсчёта m-элементных подмультимножеств заданного мультимножества с весами элементов m_1, m_2, $\ldots$, m_n. Применяя метод производящих функций, далее мы получим новую формулу для решения задачи (1), (2) и некоторых её обобщений.

Отметим, что конфеты в ящиках могут быть упакованы не насыпью, а находиться в коробках или блоках по r_j штук, $j = 1, \ldots, N$. Таким образом, имеется N типов коробок, где в коробке j-го типа находится r_j конфет.

Замечание 2. В отношении последней задачи возможны два варианта. В первом случае разрешается из каждого ящика брать не более одной коробки конфет. Решение задачи в этом случае будем называть числом сочетаний с повторениями при блочных ограничениях и обозначать символом $f_n^m \left[\dfrac{m_1, m_2, \ldots, m_n}{r_1, r_2, \ldots, r_N}\right]$. Во втором случае ограничений на количество коробок нет. Необходимо лишь, чтобы суммарное количество конфет, взятых из k-го ящика, не превышало m_k, $k = 1, \ldots, n$. Решение второй задачи будем называть числом сочетаний второго типа с повторениями при блочных ограничениях и обозначать символом $F_n^m \left[\dfrac{m_1, m_2, \ldots, m_n}{r_1, r_2, \ldots, r_N} \right]$.

Интерпретация формулы $f_n^m \left[\dfrac{m_1, m_2, \ldots, m_n}{r_1, r_2, \ldots, r_N} \right]$ в терминах числа решений диофантова уравнения (1) приводит к следующим ограничениям для допустимых решений:

$$0 \leqslant x_k \leqslant m_k,\ x_k \in \{r_1, r_2, \ldots, r_N\},\ k = 1, \ldots, n,$$

где r_j, $j = 1, \ldots, N$, — произвольные целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} \{r_j\} \leqslant \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \{m_k\}$.

Введём в рассмотрение следующие множества целых чисел ($k = 1, \ldots, n$):

$$I\left(m_k; r_1, r_2, \ldots, r_N\right) = \left\{ r : r = \sum_{p=1}^{N} \alpha_{kp} r_p \leqslant m_k,\ \alpha_{kp} \in \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\},\ p = 1, \ldots, N \right\}.$$

Тогда для определения комбинаторного числа $F_n^m \left[\dfrac{m_1, m_2, \ldots, m_n}{r_1, r_2, \ldots, r_N} \right]$ через целочисленные решения уравнения (1) приходим к следующим ограничениям:

$$0 \leqslant x_k \leqslant m_k,\ x_k \in I\left(m_k; r_1, r_2, \ldots, r_N\right),\ k = 1, \ldots, n.$$

2. Формулы для числа сочетаний с повторениями при ограничениях

Для вывода формул числа сочетаний с повторениями при ограничениях воспользуемся следующей конструкцией метода производящих функций [7]. Рассмотрим формальный полином

$$P(t) = \left(1 + t + t^2 + \ldots + t^{m_1}\right)\left(1 + t + t^2 + \ldots + t^{m_2}\right) \ldots \left(1 + t + t^2 + \ldots + t^{m_n}\right) = \\ = \sum_{\substack{j=0, x_1+x_2+\ldots+x_n=j, \\ 0 \leqslant x_k \leqslant m_k, k=1,\ldots,n}}^{m_1+m_2+\ldots+m_n} t^{x_1} t^{x_2} \ldots t^{x_n}. \qquad (3)$$

Представим $P(t)$ в стандартной форме по возрастающим показателям степеней:

$$P\left(t\right) = 1 + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots + p_R t^R,\ R = m_1 + m_2 + \ldots + m_n.$$

Тогда из тождества (3) следует, что $f_n^m \left[m_1, m_2, \ldots, m_n\right] = p_m$. Для вычисления данного коэффициента положим в тождестве (3) $t = \exp\{i\varphi\}$, где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Умножим обе части полученного соотношения на $\exp\{-im\varphi\}$ и проинтегрируем его по переменной φ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Учитывая, что система функций $\{\exp\{ik\varphi\}\}_{k=0}^{\infty}$ является ортогональной в пространстве $L_2\left[-\pi, \pi\right]$, получим следующее представление:

$$f_n^m \left[m_1, m_2, \ldots, m_n\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-im\varphi\right) \prod_{k=1}^{n} \frac{\exp\left\{i\left(m_k + 1\right)\varphi\right\} - 1}{\exp\left\{i\varphi\right\} - 1} d\varphi.$$

Аналогично, рассматривая тождество

$$\left(\sum_{j: r_j \leqslant m_1} t^j \right) \left(\sum_{j: r_j \leqslant m_2} t^j \right) \ldots \left(\sum_{j: r_j \leqslant m_n} t^j \right) = \sum_{\substack{0 \leqslant x_k \leqslant m_k,\ k=1,\ldots,n, \\ x_k \in \{r_1, r_2, \ldots, r_N\}}} t^{x_1} t^{x_2} \ldots t^{x_n},$$

приходим к представлению

$$f_n^m\left[\frac{m_1,m_2,\ldots,m_n}{r_1,r_2,\ldots,r_N}\right]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\prod_{p=1}^{n}\sum_{j:0\leqslant r_j\leqslant m_p}\exp\left\{i\varphi\left(r_j-m\right)\right\}d\varphi. \qquad (4)$$

Наконец, используя тождество

$$\left(\sum_{j:r_j\in I(m_1;r_1,r_2,\ldots,r_N)}t^j\right)\left(\sum_{j:r_j\in I(m_2;r_1,r_2,\ldots,r_N)}t^j\right)\ldots\left(\sum_{j:r_j\in I(m_n;r_1,r_2,\ldots,r_N)}t^j\right)=$$
$$=\sum_{\substack{0\leqslant x_k\leqslant m_k,\ k=1,\ldots,n,\\ x_k\in I(m_k;r_1,r_2,\ldots,r_N)}}t^{x_1}t^{x_2}\ldots t^{x_n},$$

получаем выражение для числа сочетаний второго типа с повторениями при блочных ограничениях:

$$F_n^m\left[\frac{m_1,m_2,\ldots,m_n}{r_1,r_2,\ldots,r_N}\right]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\prod_{p=1}^{n}\sum_{j:r_j\in I(m_p;r_1,r_2,\ldots,r_N)}\exp\left\{i\varphi\left(r_j-m\right)\right\}d\varphi. \qquad (5)$$

3. Некоторые следствия и обобщения

Отметим, что если элементы в последовательности $\{r_1,r_2,\ldots,r_N\}$ рекуррентно связаны, например образуют геометрическую прогрессию, то подынтегральные выражения в соотношениях (4), (5) допускают дальнейшее упрощение. Например, если $r_j/r_{j-1}=a=\mathrm{const}$ для $j=2,\ldots,N$, то, учитывая, что

$$\sum_{j:r_j\leqslant m_k}t^j=t^{r_1}\frac{t^{\psi(k)}-1}{t-1},\text{ где }\psi\left(k\right)=\left[1+\log_a\left(\frac{m_k}{r_1}\right)\right],\quad [z]\text{— целая часть числа } z,$$

соотношение (4) примет в этом случае более простую форму

$$f_n^m\left[\frac{m_1,m_2,\ldots,m_n}{r_1,r_2,\ldots,r_N}\right]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{-im\varphi\right\}A\left(i\varphi\right)d\varphi,$$

где

$$A\left(t\right)=\frac{t^{nr_1}}{\left(t-1\right)^n}\prod_{k=1}^{n}\left(t^{\psi(k)}-1\right).$$

Выше мы рассмотрели задачи о количестве выборок конфет различного состава для одного ребенка. В качестве небольшого обобщения рассмотрим задачу, когда конфеты необходимо распределить между несколькими детьми. Пусть имеется n ящиков с конфетами, причём в разных ящиках конфеты разных видов. Пусть также в j-м ящике находится r_j конфет. Конфеты из всех ящиков необходимо распределить между m детьми так, чтобы первому досталось ровно k_1 конфет, второму — k_2 конфет и т. д., последнему — k_m конфет. Необходимо определить, сколькими способами это можно сделать. Интерпретация данной задачи в терминах решений диофантовых уравнений приводит к следующей формулировке.

Рассматривается система линейных диофантовых уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=k_1,\\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=k_2,\\ \ldots\\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=k_m,\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{l} x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=r_1,\\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=r_2,\\ \ldots\\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=r_n,\end{array}\right. \qquad (6)$$

где

$$\sum_{j=1}^{n} r_j = \sum_{i=1}^{m} k_i;\ k_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m;\ r_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Необходимо определить количество её неотрицательных решений. Решение задачи (6), (7) обозначим символом $f_{m;n}^{k_1,\ldots,k_m;r_1,\ldots,r_n}$, который также может рассматриваться как некоторое расширение понятия числа сочетаний с повторениями. Для определения данного комбинаторного числа рассмотрим следующую промежуточную подзадачу. Обозначим через $\mathbf{A} = ||a_{ij} : i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n||$ произвольную матрицу с целыми неотрицательными элементами. Через $\mathbf{b} = ||b_i : i = 1, \ldots, m||$ обозначим произвольный вектор-столбец с целыми неотрицательными элементами. Рассматривается задача определения количества неотрицательных решений системы линейных диофантовых уравнений

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i,\ i = 1, \ldots, m. \tag{8}$$

Обозначим решение рассматриваемой задачи через $\mathcal{N}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Данное число равно коэффициенту при $t_1^{b_1} t_2^{b_2} \ldots t_m^{b_m}$ в разложении по возрастающим показателям степеней производящей функции

$$\prod_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{K_j} t_1^{ka_{1j}} t_2^{ka_{2j}} \ldots t_m^{ka_{mj}}, \tag{9}$$

где $K_j = 1 + \max\left\{ \left[\dfrac{b_j}{a_{ij}}\right] + \operatorname{sgn}\left(\dfrac{b_j}{a_{ij}} - \left[\dfrac{b_j}{a_{ij}}\right]\right) :\ \forall i = 1, \ldots, m\ (a_{ij} > 0) \right\},\ j = 1, \ldots, n.$

Поступая по аналогии, как и ранее, положим в (9) $t_k = \exp\{i\varphi_k\}$, $k = 1, \ldots, m$. Далее, интегрируя полученное выражение на кубе $[-\pi, \pi]^m$ по переменным φ_k, учитывая ортогональность системы функций $\left\{ \exp\left\{ -i \sum\limits_{k=1}^{m} q_k \varphi_k \right\} : q_k \in \mathbb{Z}^+, k = 1, \ldots, m \right\}$ в пространстве $L_2[-\pi, \pi]^m$, приходим к следующему результату:

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left\{ -i \sum_{k=1}^{m} b_k \varphi_k \right\} \prod_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{K_j} \exp\left\{ ik \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \varphi_i \right\} d\varphi_1 \ldots d\varphi_m.$$

Для применения полученной формулы к определению числа целочисленных неотрицательных решений системы диофантовых уравнений (6), (7) перенумеруем неизвестные x_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, с помощью одного индекса k построчно слева направо и сверху вниз. Это соответствие для $k = 1, \ldots, mn$ задаётся правилом: $\nu_{n,m}(k) = (i, j)$, если $k = (i - 1)n + j$.

Следовательно, задача (6), (7) допускает представление в виде (8), если положить

$$\mathbf{A} = ||a_{ij} : i = 1, \ldots, m + n, j = 1, \ldots, mn||,\ \mathbf{b} = ||b_i : i = 1, \ldots, m + n||,$$

где для $i = 1, \ldots, m + n$, $j = 1, \ldots, mn$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1,\ \text{если } i \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ и } \nu_{n,m}(j) \in \{(i, q) : 1 \leqslant q \leqslant n\}, \\ 1,\ \text{если } i = m + p, 1 \leqslant p \leqslant n \text{ и } \nu_{n,m}(j) \in \{(q, p) : 1 \leqslant q \leqslant m\}, \\ 0\ \text{ в остальных случаях;} \end{cases} \tag{10}$$

$$b_i = \begin{cases} k_i,\ \text{если } 1 \leqslant i \leqslant m, \\ r_j,\ \text{если } i = m + j, 1 \leqslant j \leqslant n. \end{cases} \tag{11}$$

Таким образом, справедлива формула $f_{m;n}^{k_1,\ldots,k_m;r_1,\ldots,r_n} = \mathcal{N}\left(\mathbf{A},\mathbf{b}\right)$, где матрица $\mathbf{A}$ и вектор $\mathbf{b}$ определяются с помощью соотношений (10), (11).

Пример. Рассмотрим применение полученных выше формул для решения задачи (6), (7). Пусть $m = 3$ и $n = 2$. Необходимо найти количество всех целых неотрицательных решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = k_1, \\ x_{21} + x_{22} = k_2, \\ x_{31} + x_{32} = k_3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = r_1, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = r_2. \end{cases}$$

Пусть также $k_1 = 3$, $k_2 = 5$, $k_3 = 2$, $r_1 = 4$ и $r_2 = 6$. Очевидно, что условие (7) при этом выполнено. Матрица $\mathbf{A}$ и вектор $\mathbf{b}$ имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, количество всех целых неотрицательных решений рассматриваемой системы уравнений даётся формулой

$$f_{3;2}^{3,5,2;4,6} = \frac{1}{(2\pi)^5} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5\right) d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 d\varphi_4 d\varphi_5 = 11,$$

где

$$F\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5\right) = e^{-i(3\varphi_1+5\varphi_2 2\varphi_2+4\varphi_4+6\varphi_5)} \prod_{j=1}^{6} F_j\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5\right),$$

$$F_1\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5\right) = 1+e^{i(\varphi_1+\varphi_4)}+e^{2i(\varphi_1+\varphi_4)}+e^{3i(\varphi_1+\varphi_4)}+e^{4i(\varphi_1+\varphi_4)}+e^{5i(\varphi_1+\varphi_4)}+e^{6i(\varphi_1+\varphi_4)},$$

$$F_2\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5\right) = 1+e^{i(\varphi_1+\varphi_5)}+e^{2i(\varphi_1+\varphi_5)}+e^{3i(\varphi_1+\varphi_5)}+e^{4i(\varphi_1+\varphi_5)}+e^{5i(\varphi_1+\varphi_5)}+e^{6i(\varphi_1+\varphi_5)},$$

$$F_3\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5\right) = 1+e^{i(\varphi_2+\varphi_4)}+e^{2i(\varphi_2+\varphi_4)}+e^{3i(\varphi_2+\varphi_4)}+e^{4i(\varphi_2+\varphi_4)}+e^{5i(\varphi_2+\varphi_4)}+e^{6i(\varphi_2+\varphi_4)},$$

$$F_4\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5\right) = 1+e^{i(\varphi_2+\varphi_5)}+e^{2i(\varphi_2+\varphi_5)}+e^{3i(\varphi_2+\varphi_5)}+e^{4i(\varphi_2+\varphi_5)}+e^{5i(\varphi_2+\varphi_5)}+e^{6i(\varphi_2+\varphi_5)},$$

$$F_5\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5\right) = 1+e^{i(\varphi_3+\varphi_4)}+e^{2i(\varphi_3+\varphi_4)}+e^{3i(\varphi_3+\varphi_4)}+e^{4i(\varphi_3+\varphi_4)}+e^{5i(\varphi_3+\varphi_4)}+e^{6i(\varphi_3+\varphi_4)},$$

$$F_6\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5\right) = 1+e^{i(\varphi_3+\varphi_5)}+e^{2i(\varphi_3+\varphi_5)}+e^{3i(\varphi_3+\varphi_5)}+e^{4i(\varphi_3+\varphi_5)}+e^{5i(\varphi_3+\varphi_5)}+e^{6i(\varphi_3+\varphi_5)}.$$

Заключение

Получены некоторые обобщения понятия числа сочетаний с повторениями. Найдены интегральные формулы для рассматриваемых комбинаторных чисел, применение которых может рассматриваться как альтернатива использованию различных переборных алгоритмов, реализуемых на ЭВМ с помощью языков программирования. Однако использование данных формул приводит к вычислению определённых интегралов; вопросы, связанные с эффективностью реализации операции интегрирования, требуют дальнейшего исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. М.: Наука, 1969. 323 с.
2. *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов. СПб.: Питер, 2009. 384 с.
3. *Петровский А. Б.* Пространства множеств и мультимножеств. М.: УРСС, 2003. 248 с.
4. *MacMahon P. A.* Combinatory analysis. Cambridge: The University Press, 1915. 296 p.
5. *Juric Z. and Siljak H.* A new formula for the number of combinations and permutations of multisets // Appl. Math. Sci. 2011. V. 5. No. 18. P. 875–881.
6. *Заторский Р. А.* Подсчет m-подмультимножеств через их вторичные спецификации // Комбинаторный анализ. Вып. 7. М.: МГУ, 1986. С. 136–145.
7. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. 391 с.